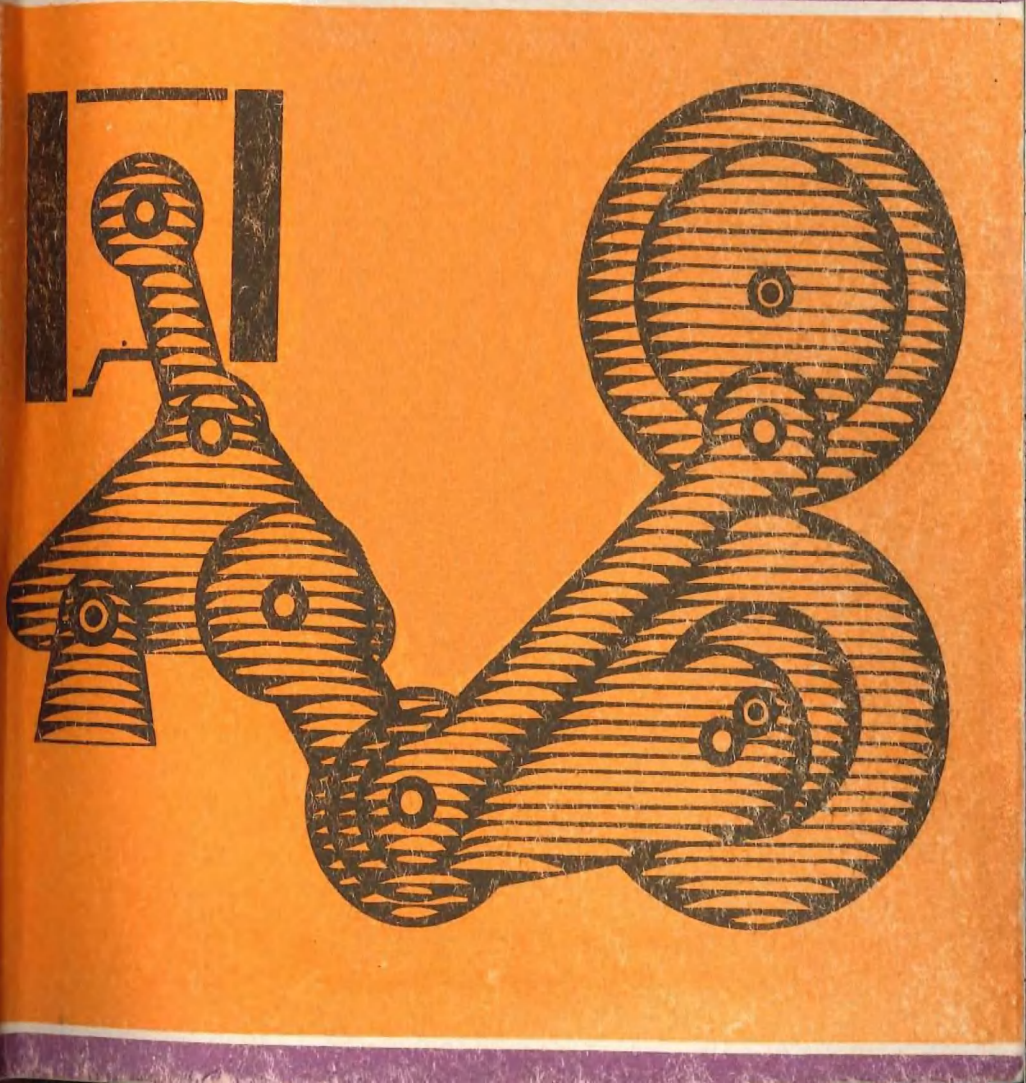
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

MECANISME

MANUAL PENTRU CLASA A XI-A LICEE INDUSTRIALE ȘI DE MATEMATICĂ-FIZICĂ
ȘI ȘCOLI PROFESIONALE

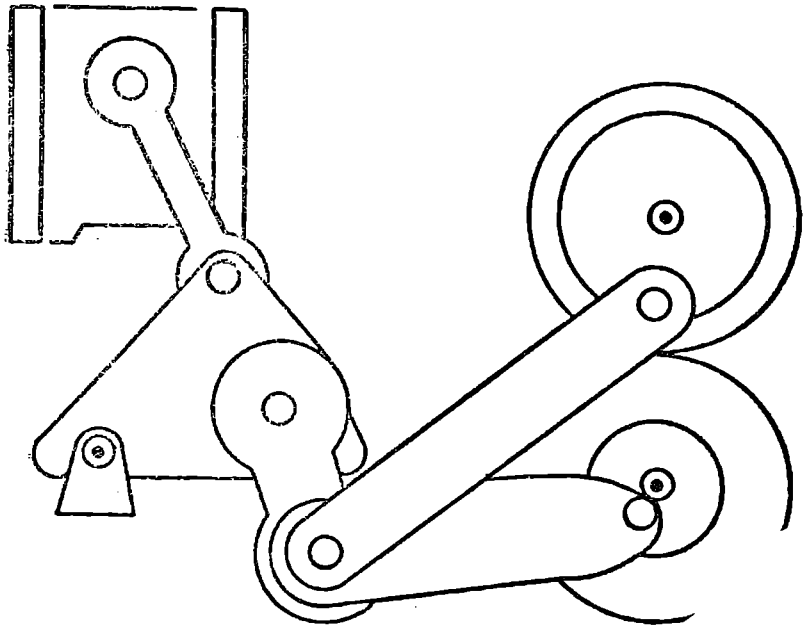


MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

Prof. univ. dr. doc. ing. NICOLAE I. MANOLESCU
Ing. MIRCEA MIHAIL POPOVICI, prof. gr. I

MECANISME

Manual pentru clasa a XI-a licee cu profilurile de mecanică, electrotehnică, mine-petrol-geologie, metalurgie, industrie alimentară, industrie ușoară, materiale de construcții, poligrafie, aeronautică, prelucrarea lemnului, și școli profesionale



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI

Manualul reprezintă reeditarea lucrărilor „Mecanisme", ediția 1980, și „Cinematica, cinetostatica și dinamica mecanismelor", ediția 1981, pus de acord cu programa școlară aprobată de Ministerul Educației și Învățământului cu nr. 36213/1981.

Textul marcat cu linie verticală este valabil numai pentru licee

Referenți: ing. **Ion Erceanu**
ing. **Dan Horvath**, prof. gr. II

Redactor: ing. **Maria-Valentina Popa**
Tehnoredactor: **Sanda Dumitrașcu**
Grafician: **Victor Wegemann**

PARTEA ÎNTÎI

GENERALITĂȚI ASUPRA MECANISMELOR

1 NOȚIUNI INTRODUCTIVE

1.1. OBIECTUL ȘI IMPORTANȚA STUDIULUI MECANISMELOR

1.1.1. OBIECTUL STUDIULUI MECANISMELOR

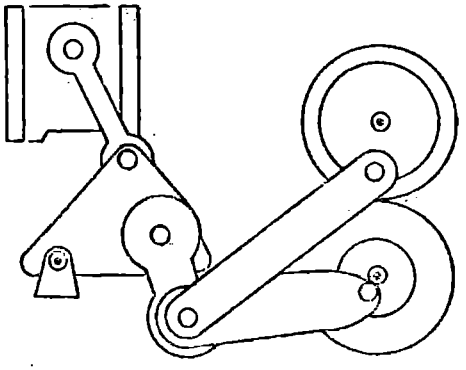
Disciplina „Mecanisme" are ca obiect studiul general al mecanismelor și mașinilor și cuprinde patru părți: structura, analiza cinematică, cinetostatica și dinamica.

Structura mecanismelor se ocupă de principalele noțiuni despre elementele cinematice, cuplele cinematice, lanțurile cinematice, mecanismele și mecanismele-motor. În această parte sînt date formulele structurale ale lanțurilor cinematice plane și ale mecanismelor plane, precum și clasificările structurale ale mecanismelor-motor plane.

Analiza cinematică a mecanismelor se ocupă cu metodele grafoanalitice prin intermediul cărora se trasează *traiectoriile* diverselor puncte ale elementelor cinematice și se stabilesc *pozițiile* mecanismului în timpul ciclului cinematic, pe baza cărora se determină *vitezele* și *accelerațiile* (liniare și unghiulare) ale unor puncte caracteristice, respectiv ale elementelor cinematice conduse.

Cinetostatica mecanismelor se ocupă cu studiul forțelor exterioare și interioare care solicită elementele mecanismului, precum și cu stabilirea valorilor reacțiunilor din cuplele cinematice și ale forțelor de echilibrare.

Dinamica mecanismelor se ocupă cu modalitățile de echilibrare statică și dinamică a mecanismelor și efectuează studiul mișcării mașinii sub acțiunea forțelor exterioare date.



Înfăptuirea amplului program adoptat de Congresul al XIII-lea al Partidului Comunist Român privind dezvoltarea continuă a societății noastre și ridicarea României socialiste pe noi culmi ale progresului și civilizației este indisolubil legată de modernizarea economiei naționale. În acest amplu proces de dezvoltare multilaterală a forțelor de producție, o coordonată fundamentală constantă a politicii P.C.R. o reprezintă întărirea rolului industrializării în lărgirea și perfecționarea continuă a bazei tehnico-materiale a socialismului, în dezvoltarea echilibrată a economiei naționale, în perfecționarea relațiilor de producție socialiste, în ridicarea bunăstării materiale și spirituale a poporului. În acest cadru, industriei constructoare de mașini îi revin sarcini de primă importanță privind perfecționarea continuă a *mecanizării și automatizării*, extinderea gamei de produse în care se materializează muncă cu un înalt grad de calificare. Nivelul atins de industria românească în domeniul construcției de utilaje petroliere și al echipamentelor pentru transportul feroviar și rutier, gama largă de autovehicule, nave, avioane, mașini-unelte și agricole realizate, precum și calitatea și diversificarea dispozitivelor și instalațiilor automatizate sau a aparaturii de măsurat, impun cunoașterea întreținerii și exploatării acestor produse la nivelul impus de ritmul general de creștere a producției și a productivității muncii în industrie.

În aceste condiții este necesar ca viitorii muncitori din diferitele ramuri ale industriei să aibă o temeinică cultură tehnică generală, care să le asigure competența necesară practicării profesiei cu un înalt randament de muncă.

Importanța studiului mecanismelor constă în faptul că face trecerea spre cunoașterea construcției de mașini și utilaje din orice domeniu industrial, sintetizînd și aplicînd într-o concepție unitară cunoștințe de matematică, fizică, tehnologie, rezistența materialelor, organe de mașini, desen tehnic, protecția muncii ș.a. În acest fel se dobîndesc cunoștințele necesare pentru rezolvarea unei game foarte diverse de probleme tehnice, cu care absolventul se va confrunta în practica productivă.

1.2. MAȘINA ȘI MECANISMUL CA SISTEME TEHNICE

Prin *sistem tehnic* se înțelege o creație a omului prin intermediul căreia legile naturii sînt utilizate în scopul ușurării muncii și sporirii productivității ei.

Mașina este un *sistem tehnic* alcătuit din părți componente distincte cinematic (numite *elemente cinematice*) care, în urma imprimării de mișcări date uneia sau unora din ele, realizează *mișcări determinate* la toate celelate elemente cinematice, cu scopul fie de a executa un *lucru mecanic util* (cazul *mașinilor de lucru*), fie de a transforma o formă oarecare de energie în energie mecanică (cazul *mașinilor motoare*).

Mecanismul reprezintă un *sistem tehnic* constituit din elemente cinematice legate între ele prin cuple cinematice care, în urma imprimării de mișcări date uneia sau unora din elemente, realizează *mișcări determinate* la toate celelalte elemente, cu scopul transmiterii sau transformării acestora.

Se constată că mecanismul îndeplinește primele două caracteristici esențiale ale mașinii: de a fi un *sistem tehnic* ale cărui elemente cinematice au *mișcări determinate*. Rezultă că, în general, mecanismul este o parte componentă a mașinii.

1.3. SCHEMELE CONSTRUCTIVE ȘI CINEMATICE ALE MECANISMELOR

Schema constructivă (fig. 1.1, *a*) constă în reprezentarea *plană* sau în *perspectivă* a elementelor și cuplelor cinematice componente ale unui mecanism. La reprezentarea schemei se folosesc normele desenului industrial.

Schema cinematică (fig. 1.1, *b*) constă în reprezentarea convențional *plană* sau în *perspectivă* a configurației geometrice a elementelor și cuplelor cinematice existente într-un mecanism, pentru un anumit sens de mișcare. Într-o astfel de schemă, elementele cinematice sînt redate prin *axele lor geometrice*, iar cuplele cinematice prin *reprezentări convenționale*.

Cele două scheme prezentate se referă la mecanismul manivelă-piston întîlnit în motoarele cu ardere internă.

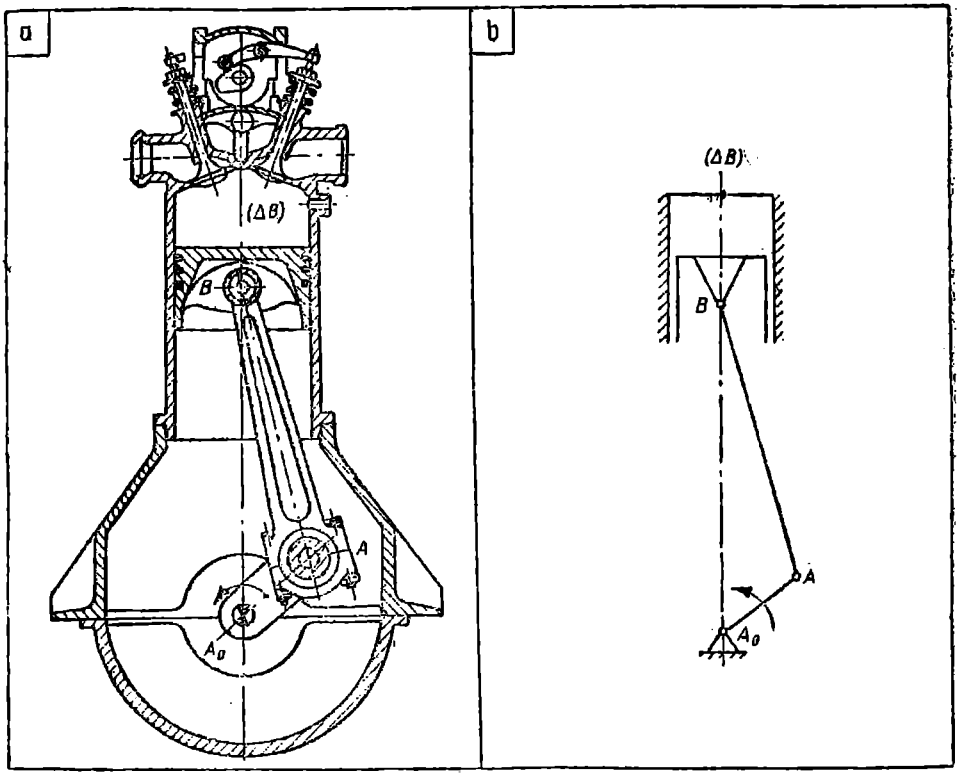


Fig. 1.1. Mecanismul manivelă-piston:
a — schema constructivă; *b* — schema cinematică.

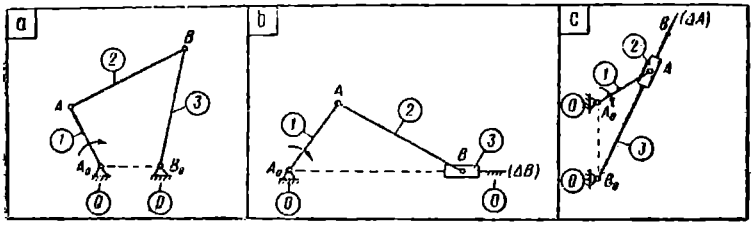


Fig. 1.2. Mecanisme uzuale cu bare:
a — mecanismul patrulater; *b* — mecanismul manivelă-piston; *c* — mecanismul manivelă-culisă.

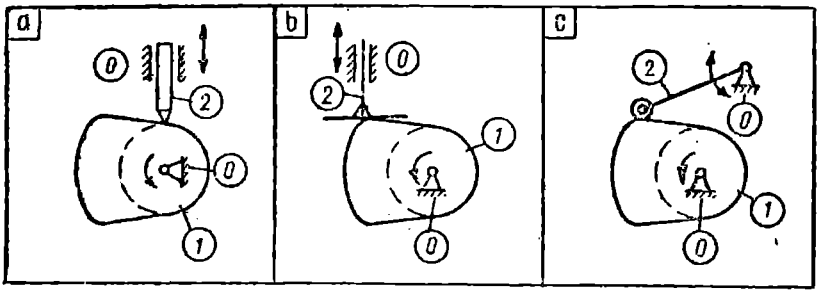


Fig. 1.3. Mecanisme cu came (tipuri uzuale):
a — camă rotativă şi tachet translant axial; *b* —camă rotativă şi tachet translant cu disc; *c* — camă rotativă şi tachet oscilant cu rolă.

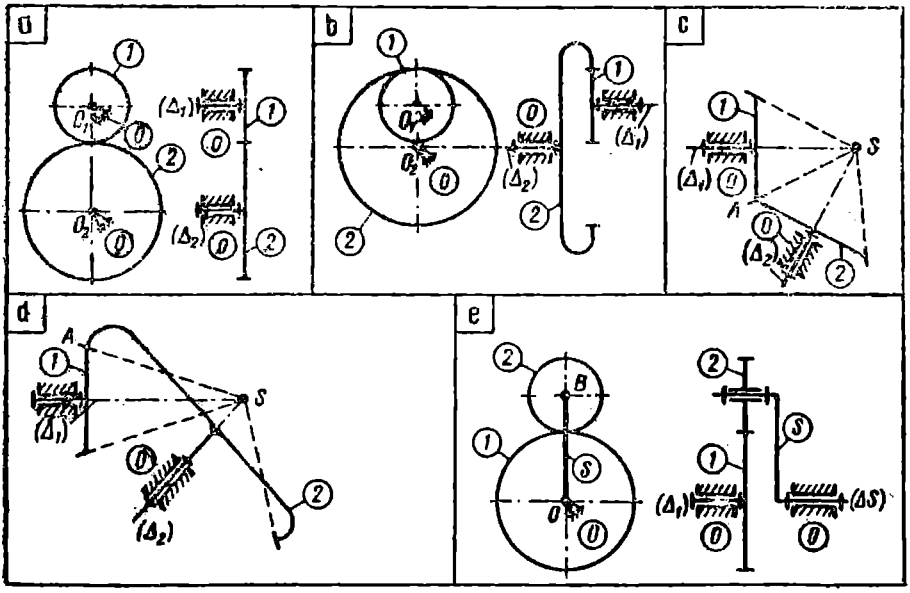


Fig. 1.4. Mecanisme cu roţi dinţate:
a — angrenaj cilindric cu axe fixe avînd angrenare exterioară; *b* — angrenaj cilindric cu axe fixe avînd angrenare interioară; *c* — angrenaj conic cu axe fixe avînd angrenare exterioară; *d* — angrenaj conic cu axe fixe avînd angrenare interioară; *e* — mecanism planetar diferenţial cilindric cu o roată centrală avînd angrenare exterioară.

1.4. CLASIFICAREA MECANISMELOR DUPĂ FORMA LOR CONSTRUCTIVĂ

Clasificarea constructivă delimitează următoarele categorii principale de mecanisme:

— *Mecanisme cu bare*, formate din elemente cinematice articulate. Dintre acestea cele mai răspîndite sînt *mecanismele plane* care au numărul cel mai mic de elemente (adică 4), cum sînt: *mecanismul patrulater* (fig. 1.2, *a*), *mecanismul manivelă-piston* (fig. 1.2, *b*) și *mecanismul manivelă-culisă* (fig. 1.2, c). În aceste scheme elementul fix (*baza* sau *batiul*) este notat cu cifra zero (0).

— *Mecanismele cu came*, compuse din trei elemente (fig. 1.3, *a*, *b*, *c*): *cama 1*, *tachetul 2* și elementul fix *0*.

— *Mecanisme cu roți dințate* (fig. 1.4, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*), constituite din minimum două roți dințate de construcție diversă, avînd toate axele de rotație fixe (mecanisme ordinare) sau unele axe fixe și altele mobile (mecanisme planetare).

— *Mecanisme diverse* (simple sau complexe), din categoria cărora fac parte: mecanismele cu cruce de Malta, mecanismele cu roți de fricțiune, mecanismele cu came (roți) și fire (curele, lanțuri, cabluri), mecanismele cu bare, roți și curele, mecanismele cu bare, roți dințate și fire etc.

Clasificarea prezentată, utilă din punct de vedere practic, prezintă dezavantajul că nu oferă posibilitatea studierii *unitare* a mecanismelor din punct de vedere cinematic și cinetostatic. Această cerință este îndeplinită de *clasificarea structurală* (a cărei prezentare se face în cap. 5). Clasificarea constructivă este acceptată din punct de vedere *didactic* pentru tratarea principalelor categorii de mecanisme folosite pe scară largă în tehnică.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Precizați obiectul și părțile componente ale studiului disciplinei „Mecanisme".*
2. *Ce caracteristici definitorii are mașina comparativ cu mecanismul?*
3. *Analizați mecanismele existente într-o mașină din atelierul școală și clasificați-le din punct de vedere constructiv.*

PARTEA A DOUA

STRUCTURA MECANISMELOR

2

ELEMENTE CINEMATICE. CUPLE CINEMATICE

2.1. ELEMENTE CINEMATICE

Prin *element cinematic* se înțelege un corp material component al mecanismului care are rolul, cînd este mobil, de a transmite mișcarea și forța (exemple: manivela, biela, pistonul, cama, cureaua etc.). Un element poate fi:

— *mobil* (exemple: arbore cotit, tachet, roată dințată), numit element cinematic;

— *fix* sau *presupus fix*, caz în care se numește *element-bază* (exemple: batiul mașinilor-unelte, carterul motorului).

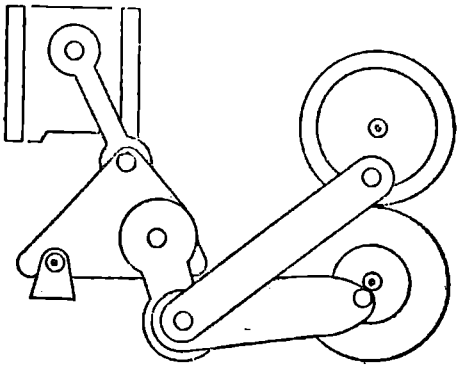
Elementul-bază reprezintă elementul față de care se studiază mișcarea celorlalte elemente ale mecanismului.

Analiza diferitelor *elemente cinematice* permite identificarea a cinci tipuri principale, și anume:

— *elemente rigide* (nedeformabile) formate fie dintr-o singură piesă (numită și *organ de mașină*), fie din mai multe organe de mașini asamblate între ele (de exemplu: biela unui motor reprezintă un singur element cinematic deși este formată din corpul propriu-zis, capace, cuzineți, șuruburi de prindere inele de siguranță etc.) (fig. 2.1, *a*);

— *elemente flexibile*, folosite pentru transmiterea *la distanță* a mișcării și implicit a puterii mecanice (exemple: cabluri, curele, lanțuri) (fig. 2.1, *b*);

— *elemente lichide* (în general *apa* la presele hidraulice și pompe, respectiv *uleiul* la prese de puteri mari) (fig. 2.1, c);



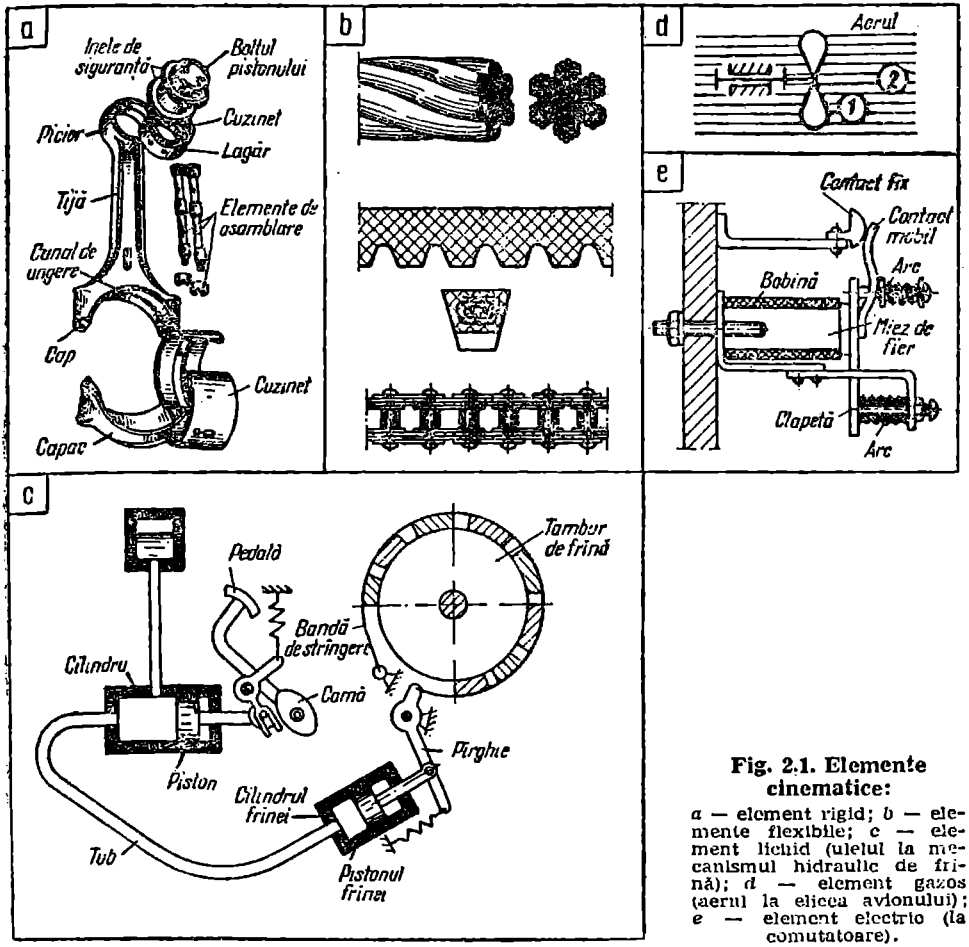


Fig. 2.1. Elemente cinematice:

a — element rigid; *b* — elemente flexibile; *c* — element lichid (uleiul la mecanismul hidraulic de frînă); *d* — element gazos (aerul la elicea avionului); *e* — element electric (la comutatoare).

— *elemente gazoase* (*aerul* la elicea avionului — fig. 2.1, *d*; *aerul comprimat* utilizat la uneltele pneumatice);

— *elemente electrice* care transmit mișcarea prin intermediul cîmpului electromagnetic (fig. 2.1, *e*).

Pentru caracterizarea structurală a unui element cinematic rigid se folosește noțiunea de *rang*. Prin rang se înțelege numărul legăturilor pe care un element cinematic le formează cu elementele vecine. Notînd cu j rangul elementului, se deosebesc:

— *elemente cinematice simple* ($j \leqslant 2$), din categoria cărora fac parte elementele *monare* ($j=1$) și elementele *binare* ($j=2$) (fig. 2.2);

— *elemente cinematice compuse* ($j>2$), cum ar fi elementele *ternare* ($j=3$) — fig. 2.3 — sau cel cu rang $j>3$ numite și *elemente polinare*.

În scopul identificării elementelor cinematice se folosesc:

— *reprezentări numerice*, afectîndu-se fiecărui element un număr i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$) cifra zero fiind atribuită elementului-bază. Celelalte

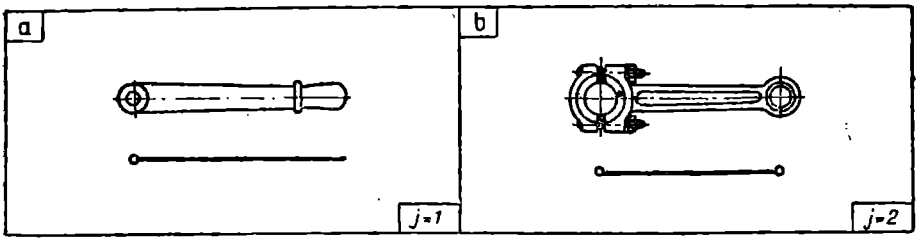


Fig. 2.2. Elemente cinematice simple:
a — element monar ($j=1$); *b* — element binar ($j=2$).

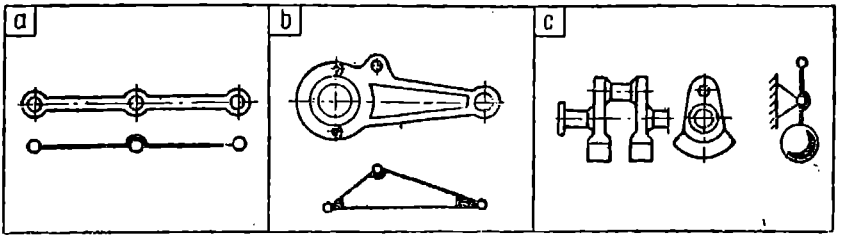


Fig. 2.3. Elemente cinematice ternare ($j=3$):
a — bară cu trei articulații; *b* — bielă cu trei articulații; *c* — arbore cotit.

n elemente sînt mobile, astfel încît numărul total de elemente ale unui mecanism este $e \neq n+1$;

— *reprezentări grafice* (semne convenționale conform STAS 1543-75 — tab. 2.1).

TABELUL 2.1

Nr crt	Denumirea	Reprezentarea convențională
1	Element monar (de rangul $j=1$)	
2	Element binar (de rangul $j=2$)	
3	Element ternar (de rangul $j=3$)	
4	Element polinar (de rangul $j=k$)	

2.2. CUPLE CINEMATICE

Cupla cinematică reprezintă *legătura mobilă directă* dintre două elemente cinematice, făcută cu *scopul limitării libertăților de mișcare relativă dintre acestea* și *transmiterii mișcării* de la un element la altul. Legătura se poate realiza *continuu* sau *periodic*, pe o *suprafață*, *linie* sau *punct*.

2.2.1. CLASIFICAREA CUPLELOR CINEMATICE

Din punct de vedere *geometric*, se deosebesc:

— *cuple cinematice inferioare*, la care contactul dintre elemente se realizează pe o *suprafață* care poate fi *cilindrică* (fig. 2.4, *a*), *sferică* (fig. 2.4, *b*), *plană* (fig. 2.4, c) și *elicoidală* (fig. 2.4, *d*). Aceste cuple sînt *reversibile*, deoarece suprafețele în contact fiind geometric identice, caracterul mișcării relative a elementelor nu se modifică, indiferent care dintre ele este fix sau mobil;

— *cuple cinematice superioare*, la care contactul dintre elemente se face pe o *linie* (fig. 2.5, *a*) sau într-un *punct* (fig. 2.5, *b*). Aceste cuple nu sînt reversibile întrucît caracterul mișcării relative a elementelor se modifică după cum unul sau altul este considerat fix.

Din punct de vedere *cinematic*, se disting:

— *cuple cinematice plane*, care permit elementelor cinematice în contact mișcări într-un singur plan sau în plane paralele (fig. 2.4, *a*, c; fig. 2.5, *a*, *b*);

— *cuple cinematice spațiale*, care permit elementelor cinematice în contact mișcări spațiale (fig. 2.4, *b*, *d*).

Din punct de vedere *constructiv* (tehnic), se întîlnesc:

— *cuple cinematice închise*, la care contactul dintre cele două elemente cinematice se realizează printr-o ghidare permanentă (fig. 2.4, *a*, *b*, *d*);

— *cuple cinematice deschise*, la care contactul dintre cele două elemente cinematice se asigură prin forță, care poate fi greutate (fig. 2.4, c) sau arc (fig. 2.5, *b*).

Din punct de vedere *structural*, cuplele cinematice se împart în cinci clase, după numărul gradelor de libertate eliminate de cupla cinematică.

Gradul de libertate reprezintă numărul parametrilor scalari independenți necesari pentru a determina, la un moment dat, poziția unui corp în raport cu un sistem de referință. El corespunde numărului de posibi-

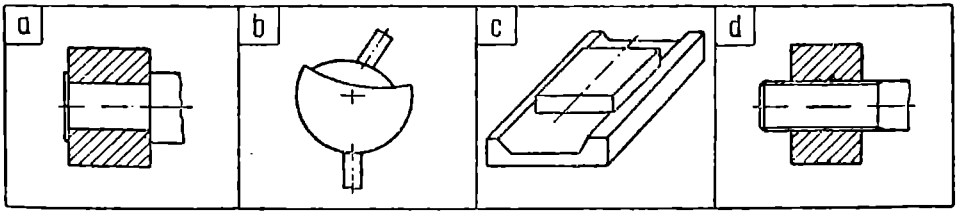


Fig. 2.4. Cuple cinematice inferioare:
a — fus cilindric în lagăr închis; *b* — articulație sferică; c — placă prismatică cu ghidaj prismatic; *d* — șurub și piuliță.

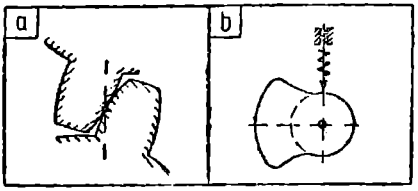


Fig. 2.5. Cuple cinematice superioare: *a* — angrenaj cilindric; *b* — camă rotativă cu tachet translant axial.

lități de mișcări simple independente ale corpului respectiv.

Un corp *liber în spațiul tridimensional* are șase grade de libertate (figura 2.6), ce corespund componentelor pe cele trei axe *Ox, Oy, Oz* ale vectorului $\underline{v}$ și vectorului rotației instantanee $\underline{\omega}$ ale mișcării sale (adică trei translații v_x, v_y, v_z de-a lungul axelor și trei rotații ω_x, ω_y, ω_z în jurul axelor).

Cele șase libertăți de mișcare pot fi *limitate*, introducînd anumite *condiții de legătură* care pot suprima mișcarea într-o direcție sau pot impune o relație între mărimile unor componente ale translației și rotației instantanee.

Dacă se notează cu l numărul gradelor de libertate pe care o cuplă cinematică le permite elementelor ei ($0 \leqslant l \leqslant 6$) și m numărul de mișcări anulate de cuplă ($1 \leqslant m \leqslant 5$), se obține o relație evidentă:

$$\boxed{l=6-m.} \qquad (2.1)$$

Un rigid în *plan* are trei grade de libertate; drept consecință, relația (2.1) devine:

$$\boxed{l=3-m.} \qquad (2.2)$$

Clasa cuplei cinematice va fi dată de numărul mișcărilor anulate m.

Pentru stabilirea clasei unei cuple cinematice se au în vedere trei *principii:*

— existența unei cuple presupune cel puțin o restricție de mișcare care nu poate fi decît de translație T, deoarece legătura nu permite deplasarea după normala comună (fig. 2.7). Prin urmare: $m_{min}=1(T)$;

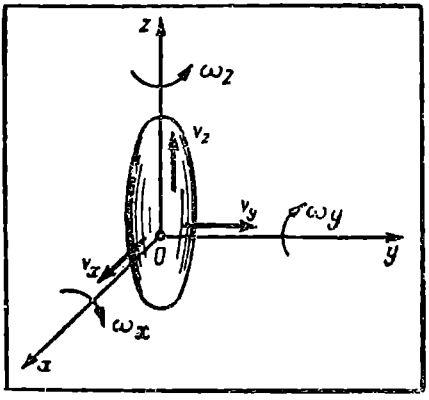


Fig. 2.6. Gradele de libertate ale unui corp liber în spațiu.

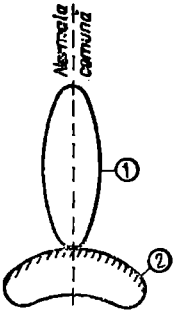


Fig. 2.7. Restricția de translație după direcția normalei comune

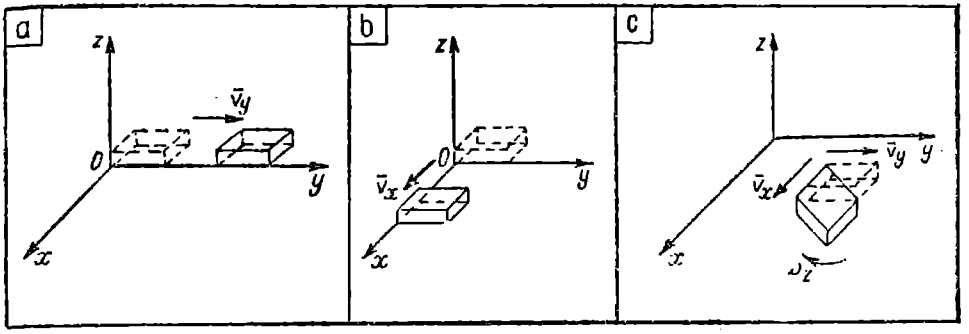


Fig. 2.8. Libertăţile de mişcare ale elementului liber pe plan:
a — translaţie în lungul axei *Oy*; *b* — translaţie în lungul axei *Ox*; *c* — mişcare plană.

— o cuplă poate introduce maximum cinci restricţii de mişcare, şi anume: trei rotaţii ($3R$) şi două translaţii ($2T$). Rezultă $m_{max}=5$ restricţii: $(3R+2T)$ — cuplă de translaţie sau $(2R+3T)$ — cuplă de rotaţie;

— un element cinematic cu două libertăţi de translaţie $2T$ descrie o *mişcare plană* şi, în mod implicit, are şi o mişcare de rotaţie R. Deci, două translaţii asociază obligatoriu şi o rotaţie cînd elementul este liber pe plan $(2T \rightarrow R)$ (fig. 2.8, *c*).

Folosindu-se notaţia simbolică c_m^{RT}, se pot distinge următoarele tipuri de cuple cinematice:

— *cuple de clasa I* $(m=1,\ l=5,\ c_1) : c_1^{32}$ (fig. 2.9, *a*). Cupla c_1^{23} nu este posibilă deoarece contactul dintre corpuri suprimă translaţia după normala comună;

— *cuple de clasa a II-a* $(m=2,\ l=4,\ c_2) : c_2^{31}$ (fig. 2.9, *b*), c_2^{22} (fig. 2.9, *c*).

Cupla c_2^{13} nu are sens ca şi în cazul precedent;

— *cuple de clasa a III-a* $(m=3,\ l=3,\ c_3) : c_3^{30}$ (fig. 2.9, *d*), c_3^{21} (fig. 2.9, *e*), c_3^{12} (fig. 2.9, *f*). Cupla c_3^{03} este imposibilă deoarece un corp liber pe plan nu poate avea trei translaţii:

— *cuple de clasa a IV-a* $(m=4,\ l=2,\ c_4) : c_4^{20}$ (fig. 2.9, *g*), c_4^{11} (fig. 2.9, *h*).

Cupla c_4^{02} nu poate exista deoarece un element cinematic cu două libertăţi de translaţie are implicit şi o libertate de rotaţie cînd este liber pe plan;

— *cuple de clasa a V-a* $(m=5,\ l=1,\ c_5) : c_5^{10}$ (fig. 2.9, *i*), c_5^{01} (fig. 2.9, *j*), $\widehat{c_5^{11}}$ (fig. 2.9, *k*). Ultima cuplă $(\widehat{c_5^{11}})$ are două libertăţi de mişcare (rotaţie şi translaţie) *dependente una de alta*. Acesta este cazul cuplei elicoidale (cupla şurub) formată dintr-un şurub şi piuliţa sa, la care, între viteza unghiului ω, viteza liniară v şi pasul p există relaţia:

$$\omega = \frac{2\pi}{p}\ v \text{ sau } v = \frac{p\omega}{2\pi},$$

Analizînd relaţia se observă că pentru $p=\infty$ rezultă $\omega=0$ şi $v\neq 0$ (cupla de translaţie), respectiv pentru $p=0$ se obţine $v=0$, $\omega\neq 0$ (cupla de rotaţie).

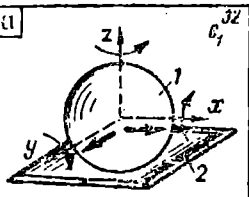
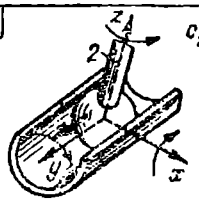
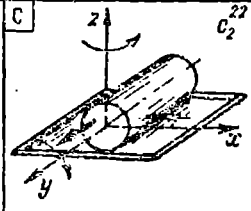
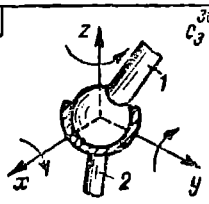
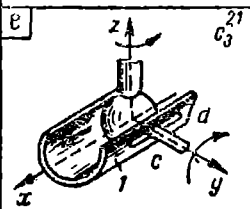
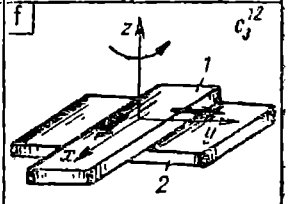
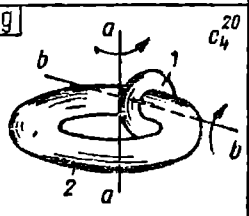
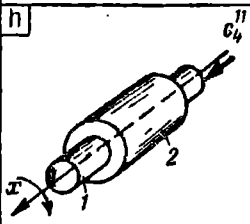
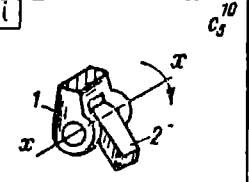
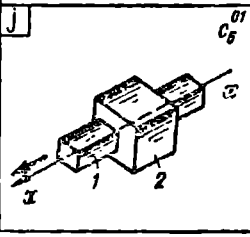
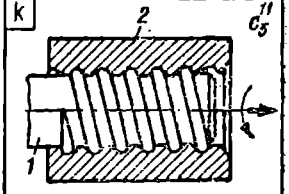
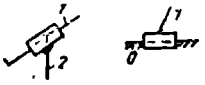
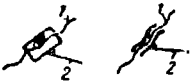
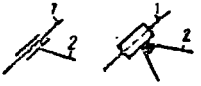
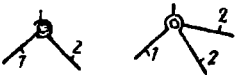
Clasa cuplei	Nr. condițiilor de legătură	Nr. gradelor de libertate	Tipul cuplei cinematice		
I	1	5	a  C_1^{32}		
II	2	4	b  C_2^{31}	c  C_2^{22}	
III	3	3	d  C_3^{33}	e  C_3^{21}	f  C_3^{12}
IV	4	2	g  C_4^{20}	h  C_4^{11}	
V	5	1	i  C_5^{10}	j  C_5^{01}	k  C_5^{11}

Fig. 2.9. Tipuri de cuple cinematice.

Cuplele cinematice se reprezintă grafic prin semne convenționale (conform STAS 1543-75) din care s-a extras tabelul 2.2.

TABELUL 2.2

Nr crt	Denumirea	Reprezentarea convențională
1	Cuplă de clasa a V-a	
	a - articulația simplă	
	b - cuplă de translație	
	c - cuplă șurub	
2	Cuplă de clasa a IV-a	
	a - cuplă inferioară (cilindrică)	
	b - cuplă superioară	
	c - cuplă sferică cu deget	

2.2.2. STABILIREA CLASEI CUPLEI CINEMATICE

Pentru stabilirea clasei unei cuple cinematice, se procedează în felul următor:

— se fixează unul din elementele cuplei;

— se atașează celuilalt element un sistem triortogonal de axe *Oxyz* și i se studiază posibilitățile de mișcare ce se înscriu într-un tabel având rubricile conform tabelului 2.3.

TABELUL 2.3

Analiza mișcărilor cuplelor

Mișcări \ Axe	Ox	Oy	Oz
Rotație			
Translație			

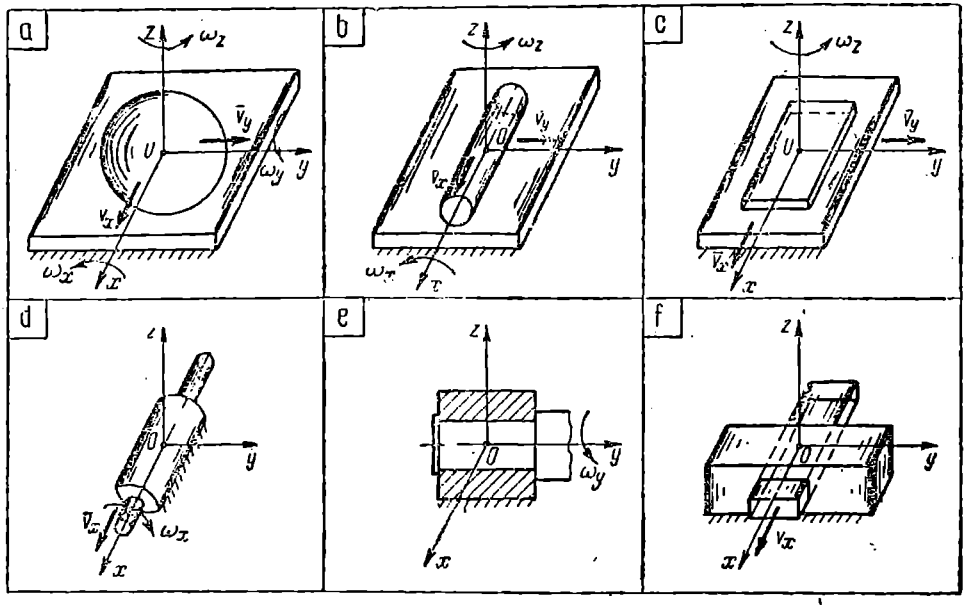


Fig. 2.10. Exemple de cuple cinematice:

a — sferă pe plan; *b* — cilindru pe plan; *c* — paralelipiped pe plan; *d* — cilindru în cilindru; *e* — fus în lagăr; *f* — paralelipiped în paralelipiped.

Exemplul 2.1. Să se studieze cuplele cinematice din figura 2.10.

Rezolvare

a) Sferă pe plan — fig. 2.10, *a* — (tab. 2.4, *a*): cuplă de clasa *I* ($m=1$, $l=5$, c_1^{32}) spațială, deschisă, superioară, nereversibilă. b) Cilindru pe plan — fig. 2.10, b — (tab. 2.4, b): cuplă de clasa a *II*-a ($m=2$, $l=4$, c_2^{22}) spațială, deschisă, superioară, nereversibilă. c) Paralelipiped pe plan — fig. 2.10, *c* — (tab. 2.4, c): cuplă de clasa a *III*-a ($m=3$, $l=3$, c_3^{12}) spațială, deschisă, inferioară, nereversibilă. d) Cilindru în cilindru — fig. 2.10, *d* — tab. 2.4, *d*): cuplă de clasa a *IV*-a ($m=4$, $l=2$, c_4^{11}) plană, deschisă, inferioară, reversibilă. e) Fus în lagăr — fig. 2.10, *d* — (tab. 2.4, *e*): cuplă de clasa a *V*-a ($m=5$, $l=1$, c_5^{10}) plană, deschisă, inferioară, reversibilă. f) Paralelipiped în paralelipiped — fig. 2.10, *f* — tab. 2.4, *f*): cuplă de clasa a *V*-a ($m=5$, $l=1$, c_5^{01}) plană, deschisă, inferioară, reversibilă.

TABELUL 2.4, a

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	1	1	1
Translație	1	1	—

TABELUL 2.4, b

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	1	—	1
Translație	1	1	—

TABELUL 2.4, c

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	—	—	1
Translație	1	1	—

TABELUL 2.4, d

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	1	—	—
Translație	1	—	—

TABELUL 2.4, e

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	—	1	—
Translație	—	—	—

TABELUL 2.4, f

Mișcări \ Axe	O_x	O_y	O_z
Rotație	—	—	—
Translație	1	—	—

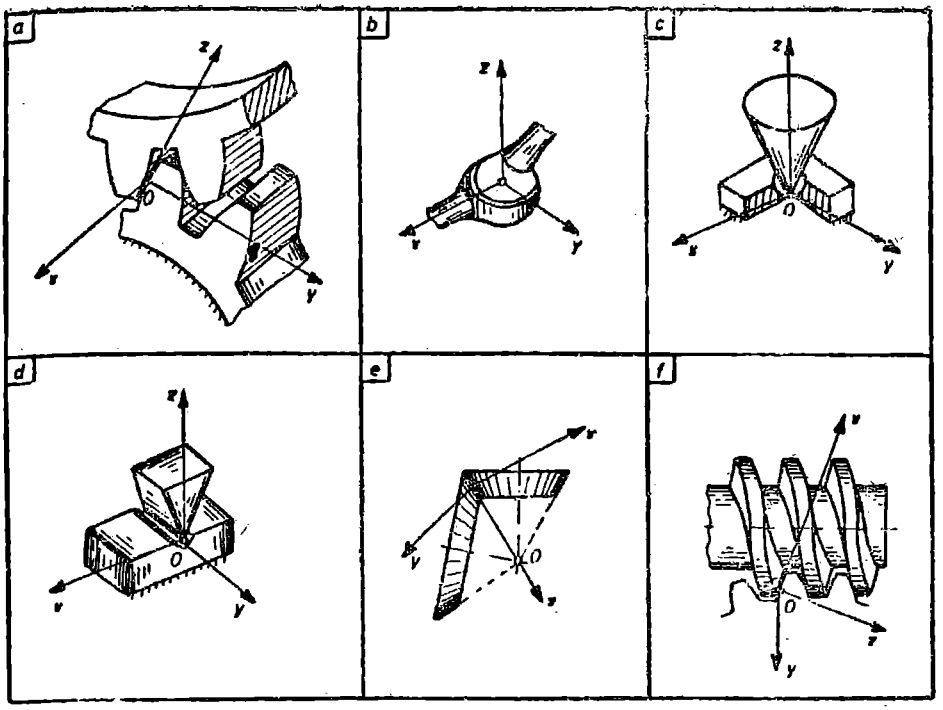


Fig. 2.11. Exemple de cuple cinematice:

a — angrenaj cilindric; *b* — articulația cutiei de viteze la automobile; *c* — con sprijinit cu vîrful de plan; *d* — prismă triunghiulară rezemată cu muchia sa pe muchia unui canal în V; *e* — angrenaj conic; *f* — șurub melc-roată melcată.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Ce diferență este între un element cinematic mobil și un element-bază?*
2. *Să se analizeze cuplele cinematice din figura 2.11.*
3. *Identificați cuplele cinematice existente la o mașină din atelierul-școală.*

3

LANȚURI CINEMATICE. MECANISME

3.1. LANȚURI CINEMATICE

Lanțurile cinematice reprezintă sisteme formate din elemente cinematice de diferite ranguri, legate între ele în mod continuu prin cuple cinematice de diferite clase. Întrucît toate elementele lanțurilor sînt *mobile*,

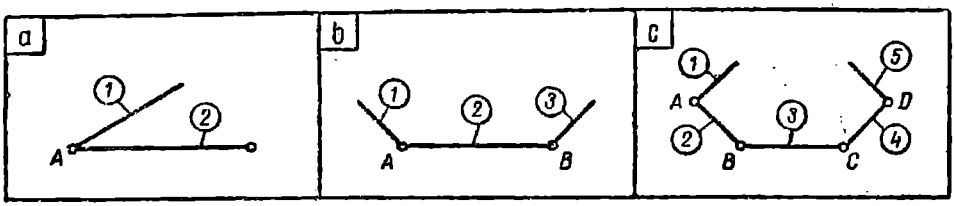


Fig. 3.1. Lanţuri cinematice simple:
1, 6 — element de rang $j=1$; *2, 4* — elemente de rang $j=2$.

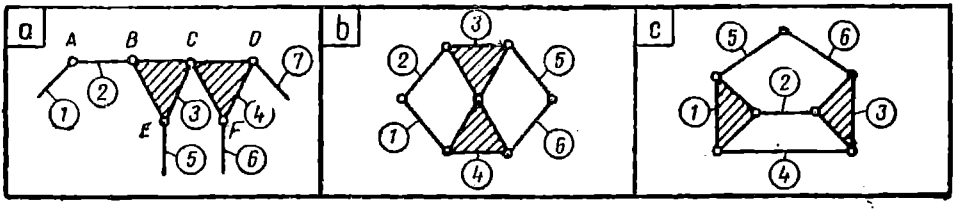


Fig. 3.2. Lanţuri cinematice complexe.

acestea pot fi folosite în tehnică numai dacă li se *fixează* unul din elementele componente.

Clasificarea lanţurilor cinematice se poate face după trei criterii: rangul elementelor componente, forma lanţului şi felul mişcării elementelor.

După *rangul* elementelor cinematice componente, se deosebesc:

— *lanţuri cinematice simple*, constituite din elemente de rang $j \leqslant 2$ (cele de rang $j=1$ sînt elemente situate la extremitatea lanţului, iar cele de rang $j=2$ sînt interioare — fig. 3.1);

— *lanţuri cinematice complexe*, care au în componenţa lor cel puţin un element de rang $j \geqslant 3$ (fig. 3.2, *a*). Dintre aceste lanţuri, o utilizare foarte largă în tehnică o au lanţurile Watt (fig. 3.2, *b*) şi Stephenson (fig. 3.2, *c*).

După *forma* lanţurilor cinematice, se deosebesc:

— *lanţuri cinematice deschise*, care cuprind elemente de rang minim $j_{min}=1$ (fig. 3.1 şi 3.2, *a*);

— *lanţuri cinematice închise*, formate din elemente cu rang minim $j_{min}=2$ (fig. 3.2, *b*, *c*).

După *felul mişcării* elementelor, se întîlnesc:

— *lanţuri cinematice plane*, ale căror elemente componente au mişcări în planul lor sau în plane paralele;

— *lanţuri cinematice spaţiale*, la care cel puţin un element are o mişcare într-un plan diferit de cel al celorlalte.

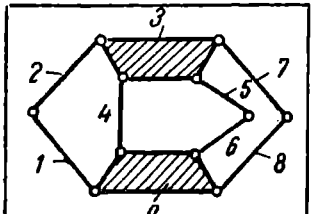


Fig. 3.3. Lanţ cinematic cu nouă elemente.

Exemplul 3.1. Să se analizeze structural lanţul cinematic cu nouă elemente (fig. 3.3).

Rezolvare. Se întocmeşte tabelul de date (tab. 3.1)

Analiza structurală a lanțului cinematic cu nouă elemente

Elementul cinematic	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rangul j	2	2	4	2	2	2	2	2	4

Rezultă că lanțul este complex (are elemente de rang $j>3$) și închis (rangul minim $j_{min}=2$).

3.2. FORMULA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE

Prin grad de libertate al unui lanț cinematic se înțelege numărul parametrilor scalari independenți, care definesc univoc pozițiile tuturor elementelor componente în raport cu unul din elementele lanțului.

Mecanismele plane au în structura lor numai cuple de clasa a patra (c_4) și cuple de clasa a cincea (c_5). Știind că:

— un element liber în plan are trei grade de libertate, e elemente având $3e$ grade de libertate;

— o cuplă de clasa a patra (c_4) suprimă elementului o libertate de mișcare ($1.c_4$), iar o cuplă de clasa a cincea (c_5), două libertăți de mișcare ($2.c_5$), atunci gradul de libertate L_3 al lanțurilor cinematice plane va fi:

$$L_3=3e-2c_5-c_4, \tag{3.1}$$

prin c_4 și c_5 înțelegîndu-se numărul cuplelor din clasele respective.

Relația (3.1) reprezintă *formula structurală a lanțurilor cinematice plane.*

3.3. LANȚURI CINEMATICE DESMODROME (DETERMINATE) SAU NEDESMODROME (NEDETERMINATE)

3.3.1. LANȚUL DESMODROM

Lanțul *desmodrom* (fig. 3.4) este lanțul la care, pentru o poziție dată unuia (sau unora) din elemente, numit *conducător* (sau conducătoare), în raport cu un element al lanțului considerat *fix,* celelalte elemente ocupă

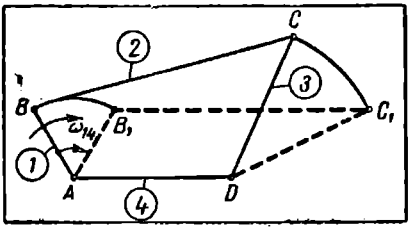


Fig. 3.4. Lanț cinematic desmodrom.

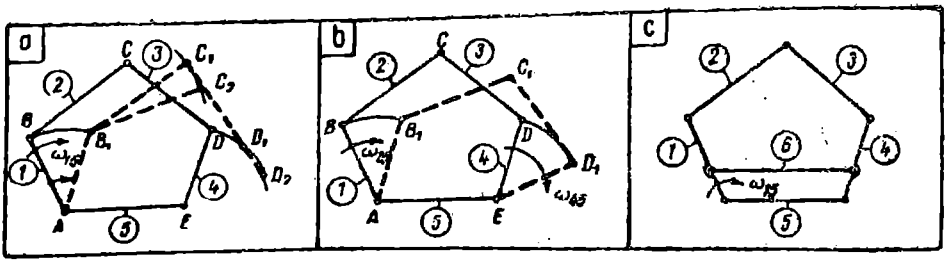


Fig. 3.5. Lanț cinematic nedesmodrom:

a — lanț pentalater nedesmodrom; *b* — lanț pentalater desmodrom cu două elemente conducătoare; *c* — lanț pentalater desmodrom cu elementul cinematic de legătură 6 transformat în lanț Stephenson cu șase elemente.

poziții bine (univoc) *determinate*. Astfel, dacă se imprimă o mișcare de rotație elementului *1* în raport cu elementul *4* presupus fix, atunci elementele *2* și *3* vor ocupa poziții perfect determinate în raport cu același element *4*, pentru orice deplasare a elementului *1*. Rezultă că desmodromia unui astfel de lanț depinde de un singur parametru cinematic. Pozițiile celorlalte două elemente (*2* și *3*) depinde de poziția articulației *C* care, în orice moment, trebuie să se găsească la distanțe constante de articulațiile *B* și *D*.

3.3.2. LANȚUL NEDESMODROM

Lanțul *nedesmodrom* este lanțul la care, pentru o poziție dată unui element considerat conducător în raport cu un element presupus fix, celelalte elemente au poziții nedeterminate. În figura 3.5, *a* este reprezentat lanțul cinematic simplu închis cu cinci elemente (lanțul pentalater) care se încadrează în această categorie.

Pentru o mișcare de rotație imprimată elementului *1* în raport cu elementul *5* presupus fix, elementul *2* poate ocupa o infinitate de poziții B_1C_1, B_1C_2 ..., deoarece articulația *C*, la rîndul ei, poate ocupa orice poziție pe arcul de cerc de rază *BC* cu centrul în B_1. De asemenea articulația *D* se poate găsi în orice punct de pe arcul de cerc de rază *ED*. Nedesmodromia se ridică fie dacă se imprimă o mișcare de rotație independentă și simultană elementului *4* (fig. 3.5, b), fie dacă se mai adaugă un element de legătură *6* între elementele *1* și *4* (fig. 3.4, c), lanțul devenind lanț Stephenson cu șase elemente.

3.4. MECANISME

Mecanismele sînt lanțuri cinematice desmodrome cu un element fix (sau considerat fix) *al căror grad de mobilitate este egal cu numărul elementelor conducătoare.*

Mecanismele-motor se definesc a fi mecanismele cărora li se precizează elementul conducător (sau elementele conducătoare). Prin urmare, dintr-un lanț cinematic rezultă, prin operația de fixare a unui element, atîtea mecanisme distincte *cîte elemente neidentice structural are lanțul*, iar dintr-un mecanism se obțin *mai multe mecanisme-motor* în funcție de

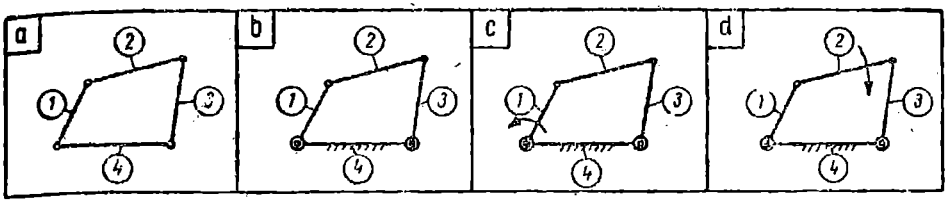


Fig. 3.6. Mecanisme motor rezultate din lanțul patrulater:

a — lanț patrulater; *b* — mecanism patrulater; *c* — mecanism-motor patrulater avînd element conducător manivela 1; *d* — mecanism-motor patrulater avînd element conducător biela 2.

elementul care devine conducător (sau elementele care devin conducătoare). De exemplu (fig. 3.6), din lanțul patrulater, prin fixarea elementului *4* se obține un mecanism, iar prin precizarea elementelor *1* sau *2* ca fiind conducătoare se obțin două mecanisme-motor. Cea mai mare utilitate practică o are mecanismul-motor la care *elementul conducător este legat la bază.*

Mecanismele pot fi formate atît din lanțuri cinematice deschise (exemplu: roboții industriali), cît și din cele închise (exemplu: transmisiile mecanice).

Prin *grad de mobilitate al unui mecanism* se înțelege numărul posibilităților sale de mișcare sau al gradelor de libertate al elementelor mobile în raport cu elementul fix. Pentru a se determina gradul de mobilitate M_3 al mecanismelor *plane* se pornește de la observația că, prin fixarea unui element cinematic al lanțului, se mai suprimă trei grade de libertate. Deci:

$$M_3 = L_3 - 3 = 3e - 2c_5 - c_4 - 3 = 3(e-1) - 2c_5 - c_4.$$

Introducînd notația

$$n = e - 1,$$

unde n reprezintă numărul elementelor cinematice mobile ale lanțului, se obține expresia gradului de mobilitate al mecanismelor plane (formula Grübler-Cebîșev):

$$\boxed{M_3 = 3n - 2c_5 - c_4} \qquad (3.2)$$

Se menționează că, în tehnică, numărul cel mai mare de mecanisme plane îl reprezintă mecanismele cu un singur grad de mobilitate ($M_3 = 1$).

Determinarea gradului de mobilitate al mecanismului este o operație obligatorie deoarece valoarea sa arată dacă mecanismul funcționează ($M > 0$) sau nu ($M \leqslant 0$) și indică numărul elementelor conducătoare necesare îndeplinirii condiției de desmodromie.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Definiți și clasificați lanțurile cinematice. Imaginați lanțuri cinematice din fiecare clasificare.*
2. *Să se analizeze structural lanțul mecanismului semaforului mecanic și lanțul mecanismului de frînare manuală la vagoane, reprezentate în figura 3.7.*
3. *Definiți gradul de mobilitate al lanțului cinematic și stabiliți relația cu care se determină.*

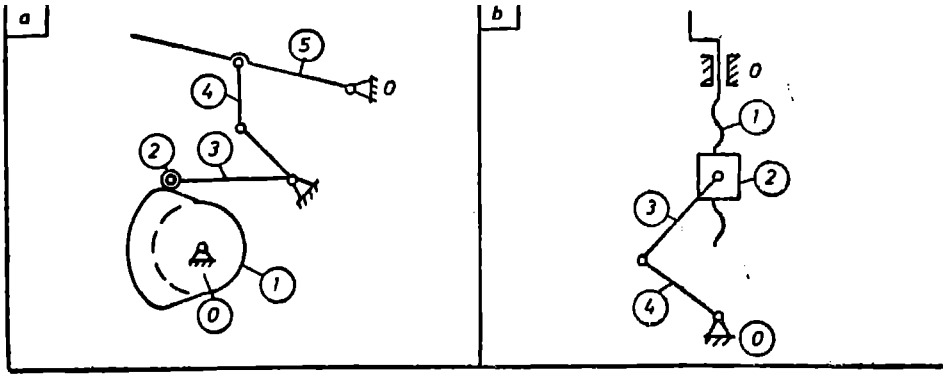


Fig. 3.7. Mecanisme plane diverse:
a — mecanismul semaforului mecanic; *b* — mecanismul de frînare manuală la vagoane.

4. *Definiți mecanismul, mecanismul-motor, gradul de mobilitate și demonstrați relația cu care se calculează gradul de mobilitate.*
5. *Precizați ce informații sînt oferite de cunoașterea gradului de mobilitate al unui mecanism.*

4

ECHIVALAREA CUPLELOR CINEMATICE SUPERIOARE LA MECANISMELE PLANE. DETERMINAREA FAMILIEI ȘI A GRADULUI DE MOBILITATE AL UNUI MECANISM PLAN

Pentru determinarea familiei și a gradului de mobilitate al mecanismelor plane este necesar ca, în prealabil, dacă este cazul, să se echivaleze cuplele cinematice superioare (cuplele de clasa a *IV-a*) prin elemente cinematice și cuple de clasa a V-a, să se elimine elementele cinematice pasive sau cu mișcare de prisos, precum și cuplele pasive și să se precizeze numărul articulațiilor distincte.

4.1. ECHIVALAREA CUPLELOR CINEMATICE SUPERIOARE LA MECANISMELE PLANE

Studiul structural și cinematic al mecanismelor plane este posibil dacă se *unifică* schemele lor cinematice prin înlocuirea cuplelor superioare de clasa a *IV-a* prin *lanțuri cinematice echivalente* formate din elemente cinematice și cuple de clasa a *V-a*. Mecanismele rezultate în urma operației de echivalare a cuplelor superioare se numesc *mecanisme echivalente* cu

cuple inferioare. Echivalentul cuplelor superioare trebuie să îndeplinească trei condiții:

— gradul de mobilitate al mecanismului rezultat prin echivalare (M_{3e}) să nu se modifice ($M_{3e}=M_3$);

— legea de mișcare a elementului condus să rămînă neschimbată;

— echivalența mecanismului rezultat cu cel inițial să fie valabilă în tot timpul ciclului cinematic.

Pentru realizarea primei condiții se pornește de la formula gradului de mobilitate a mecanismelor plane ($M_3=3n-2c_5-c_4$) la care cupla superioară c_4 se înlocuiește prin adăugarea a n_e elemente cinematice și a c_{5e} cuple cinematice. În acest fel relația gradului de mobilitate a mecanismelor echivalente devine $M_{3e}=3(n+n_e)-2(c_5+c_{5e})$. Din condiția $M_{3e}=M_3$ se deduce

$$3(n+n_e)-2(c_5+c_{5e})=3n-2c_5-c_4,$$

adică

$$3n_e-2c_{5e}+c_4=0, \text{ de unde}$$

$$c_{5e}=\frac{3n_e+c_4}{2}.$$

Pentru $c_4=1$, relația anterioară devine:

$$\boxed{c_5=\frac{3n_e+1}{2}} \qquad (4.1)$$

S-a obținut astfel o ecuație diofantică (cu coeficienți întregi și rezolvabilă numai în numere întregi și pozitive). Luînd $n_e=1$, rezultă $c_{5e}=2$, adică *„o cuplă de clasa a IV-a este echivalentă din punct de vedere structural cu un element cinematic și două cuple de clasa a V-a (element cinematic binar)"*.

Prin urmare, la mecanismele plane, o cuplă cinematică superioară de clasa a *IV-a* se poate înlocui printr-un element cu două cuple de rotație (fig. 4.1, *a*) sau printr-un element cinematic cu o cuplă de rotație și alta de translație (fig. 4.1, b). Cea de-a doua soluție poate fi uneori simplificată, reducînd la zero lungimea elementului cinematic prin suprapunerea cuplelor (fig. 4.1, c).

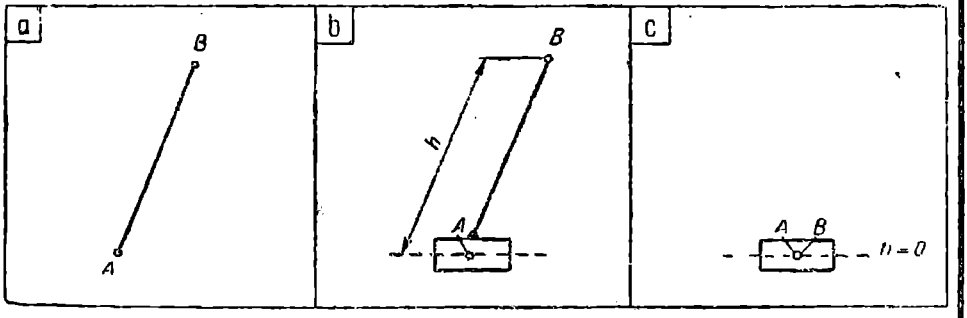


Fig. 4.1. Element cinematic binar înlocuitor al cuplei superioare:
a — element cu două cuple de rotație; b — element cu o cuplă de rotație și alta de translație; c — element de lungime nulă cu cuplele suprapuse.

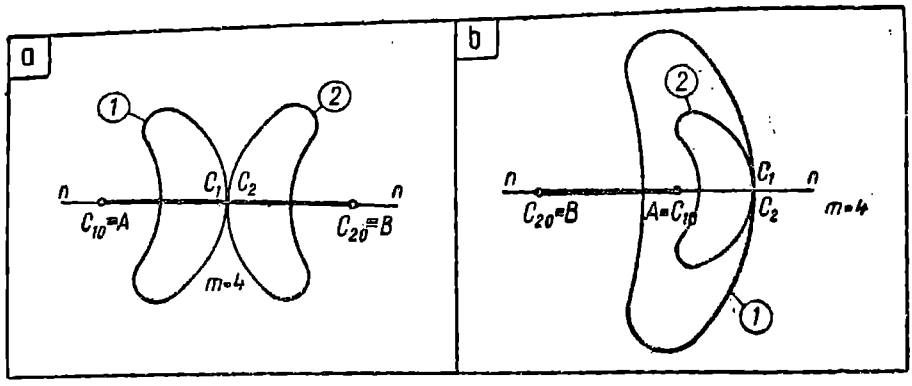


Fig. 4.2. Poziția elementului cinematic înlocuitor și a cuplelor sale cînd profilurile au raze de curbură finite.

Varianta elementului cinematic cu două cuple de translație nu poate fi luată în considerație deoarece mecanismul se blochează.

Poziția elementului cinematic binar înlocuitor AB coincide cu *normala comună* n celor două profiluri în contact ale cuplei de clasa a *IV-a*, iar poziția cuplelor cinematice înlocuitoare coincide cu *centrele de curbură* C_{10}, C_{20} ale profilurilor corespunzătoare în momentul considerat al mișcării (fig. 4.2).

Înlocuirea mecanismului plan cu mecanismul echivalent are loc *în tot timpul ciclului cinematic* numai dacă *razele de curbură ale celor două profiluri în contact* ale cuplei cinematice de clasa a *IV-a* sînt *constante*. Această condiție este îndeplinită de *arcele de cercuri* sau de *arcele de cerc și linia dreaptă*.

Dacă razele de curbură ale celor două profiluri în contact sînt variabile în timpul ciclului cinematic, echivalarea este valabilă din punct de vedere geometric *numai pentru poziția considerată*.

Exemplul 4.1. Să se echivaleze cupla cinematică superioară la mecanismul cu came circulare din figura 4.3, *a* și la angrenajul cilindric din figura 4.3, *b*.

Rezolvare

Mecanismul cu camă. Cupla superioară C ($m=4$) se înlocuiește cu un element cinematic binar $AB=R_1+R_2$ și două cuple de rotație A și B amplasate în centrele de curbură C_{10}, respectiv C_{20}, ale celor două profiluri în contact. Se obține meca-

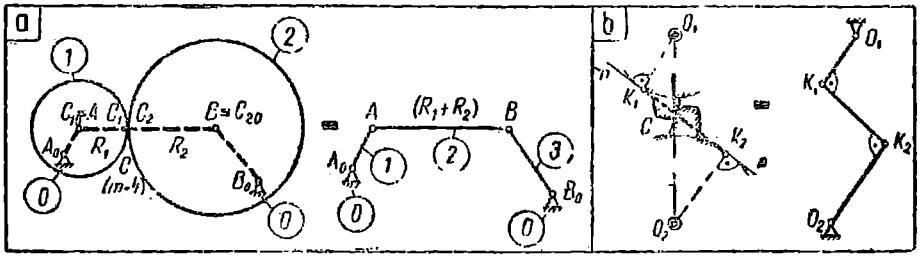


Fig. 4.3. Determinarea mecanismului echivalent cu cuple inferioare:
a — mecanism cu came circulare; *b* — mecanism cu roți dințate.

nismul patrulater ca mecanism echivalent, operația de echivalare avînd loc tot timpul ciclului cinematic, deoarece razele de curbură R_1 și R_2 sînt constante.

Angrenajul cilindric. Deoarece profilurile celor doi dinți în contact sînt evolvente, centrele lor de curbură K_1 și K_2 se găsesc la picioarele perpendicularelor coborîte din centrele roților O_1, O_2 pe normala comună n (linia de angrenare a celor două profiluri în contact). Cupla superioară C ($m=4$) se înlocuiește cu elementul cinematic K_1K_2 avînd două cuple de rotație amplasate în centrele de curbură. Mecanismul echivalent este mecanismul antipatrulater, iar echivalarea are loc în tot timpul ciclului cinematic deoarece razele cercurilor de bază (R_1, R_2) sînt constante și, drept consecință, punctele K_1 și K_2 sînt fixe.

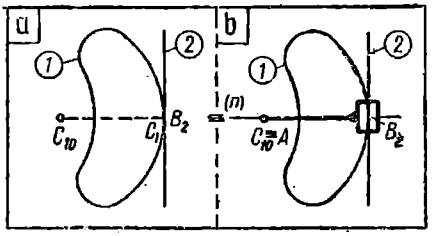


Fig. 4.4. Poziția elementului cinematic înlocuitor și a cuplelor sale cînd unul din profiluri are raza infinită.

În tehnică, se mai pot întîlni următoarele cazuri particulare:

Raza de curbură a unuia din profilurile în contact este infinită (cazul profilului liniar — fig. 4.4, *a*). În această situație, elementul cinematic înlocuitor (fig. 4.4, *b*) are o cuplă de rotație A amplasată în centrul de curbură finit C_{10} și o cuplă de translație B pe direcția profilului liniar (deoarece mișcarea de rotație în jurul unui punct aflat la infinit este echivalentă cu o mișcare de translație).

Exemplul 4.2. Să se echivaleze cupla superioară dintre camă și tachetul plan plat la mecanismul din figura 4.5, *a*.

Rezolvare. Elementul cinematic înlocuitor are o cuplă de rotație A amplasată în centrul de curbură finit C_{10} și o cuplă de translație B_2 pe direcția tachetului (fig. 4.5, *b*, *c*). Lungimea elementului binar $AB_2=R_1$ se poate anula suprapunînd ghidajul cuplei de translație peste cupla de rotație. Mecanismul echivalent este mecanismul manivelă-culisă translantă, iar echivalarea are loc în tot timpul ciclului cinematic.

Una din curbele profilurilor se reduce la un punct (fig. 4.6). Într-o asemenea situație centrul de curbură este identic cu punctul respectiv.

Exemplul 4.3. Să se echivaleze cupla cinematică superioară B ($m=4$) la mecanismul cu camă rotativă și tachet translant cu vîrf din figura 4.7, *a*.

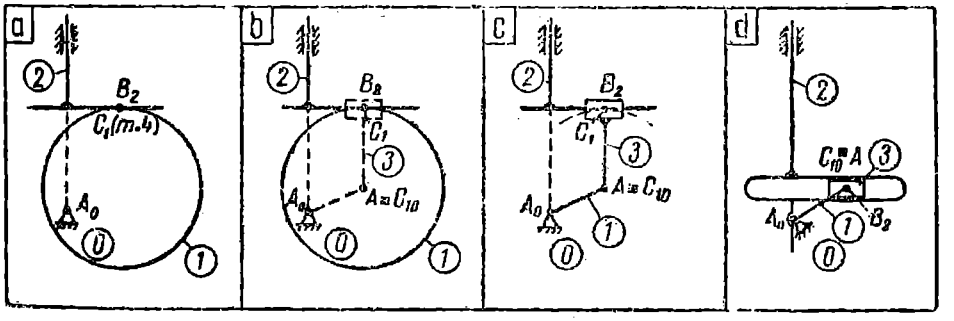


Fig. 4.5. Determinarea mecanismului echivalent cu cuple inferioare în cazul mecanismului cu camă circulară și tachet translant plat.

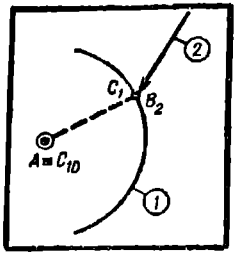


Fig. 4.6. Poziția elementului cinematic înlocuitor și a cuplelor sale cînd una din curbele profilurilor se reduce la un punct.

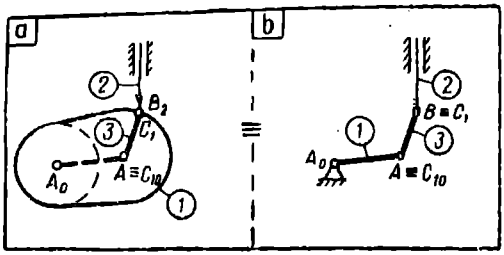


Fig. 4.7. Determinarea mecanismului echivalent cuple inferioare în cazul mecanismului cu camă rotativă și tachet translant cu vîrf.

Rezolvare. Cupla cinematică superioară B $(m=4)$ se înlocuiește cu un element AB și două cuple de rotație (fig. 4.7, *b*). Cupla A este amplasată în centrul de curbură instantaneu C_{10}, iar cupla B în punctul C_1 în contact dintre camă și tachet ($B \equiv C_1$). Mecanismul echivalent este mecanismul manivelă-glisieră iar echivalarea realizează aceeași lege de mișcare numai pentru poziția considerată.

Una din curbele profilurilor în contact este o linie dreaptă iar cealaltă un punct (fig. 4.8). Cele două cuple ale elementului cinematic înlocuitor se suprapun astfel încît elementul are lungimea nulă.

Exemplu 4.4. Să se echivaleze cupla cinematică superioară $B(m=4)$ de la mecanismul cu camă translantă și tachet axial cu vîrf (fig. 4.9, *a*).

Rezolvare. Procedînd conform metodologiei prezentate anterior se obține, ca mecanism înlocuitor, mecanismul glisieră-culisă translantă (fig. 4.9, *b*).

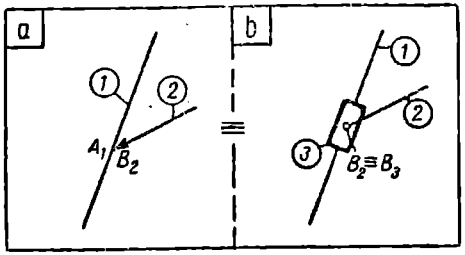


Fig. 4.8. Poziția elementului cinematic înlocuitor și a cuplelor sale cînd una din curbele profilurilor este o linie dreaptă, iar cealaltă un punct.

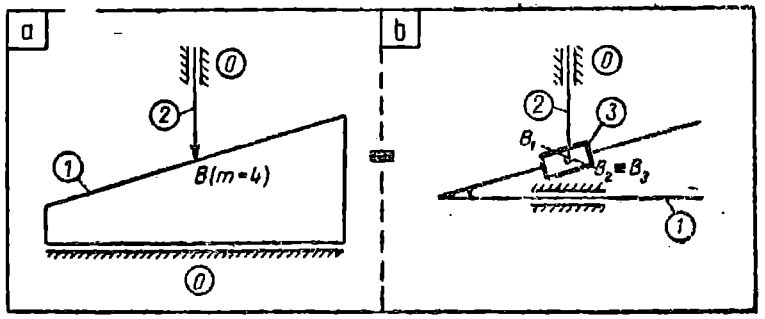


Fig. 4.9. Determinarea mecanismului echivalent cu cuple inferioare în cazul mecanismului cu camă translantă și tachet axial cu vîrf.

4.2. ELIMINAREA ELEMENTELOR CINEMATICE PASIVE SAU CU MIȘCARE DE PRISOS ȘI A CUPLELOR PASIVE

Elementele cinematice pasive îndeplinesc un triplu rol: consolidează mecanismul, ușurează trecerea prin pozițiile externe și evită rigidizarea (blocarea) sa temporară sau inversarea mișcării. Ele nu introduc condiții noi de legătură prin cuplele lor cinematice. De exemplu, în figura 4.10 elementul *CD* este pasiv atît la mecanismul patrulater consolidat (fig. 4.10, *a*) unde este paralel cu biela, cît și ca bielă de cuplare la locomotive (fig. 4.10, *b*), unde leagă două perechi de roți motoare.

La stabilirea gradului de mobilitate al unui mecanism, *elementele cinematice pasive împreună cu cuplele aferente se exclud din calcul.*

Exemplul 4.5. Pentru mecanismul paralelogram consolidat din figura 4.10, *a*, aplicarea relației (3.2) pentru $n=4$ și $c_5=6$ conduce la rezultatul:

$$M_3 = 3n - 2c_5 - c_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 0 = 0,$$

ceea ce ar însemna că sistemul respectiv este rigid (nu funcționează). În realitate însă, mecanismul respectiv funcționează avînd o mișcare determinată pentru un singur element conducător. Eliminînd elementul cinematic pasiv *4* împreună cu cuplele sale *C*, *D* și recalculînd gradul de mobilitate al mecanismului (de data aceasta pentru $n=3$ și $c_5=4$), se obține $M_3=3 \cdot 3-2 \cdot 4-0=1$, ceea ce corespunde cu realitatea.

Elementele cu mișcare de prisos sînt rolele. Ele sînt introduse în construcția mecanismelor pentru a micșora frecarea prin înlocuirea frecării cu alunecare cu frecarea cu rostogolire. Astfel, la mecanismul cu camă din figura 4.11, *a*, rola *3* se poate roti în jurul axei sale fără a influența caracterul mișcării mecanismului.

Din punct de vedere cinematic, rola poate fi îndepărtată sau rigidizată (fig. 4.11, *b*) fără a se perturba caracterul mișcării. La determinarea mobilității mecanismelor, *elementul cu mișcare de prisos (rola) și cupla sa de rotație se exclud din calcul.*

Exemplul 4.6. Pentru mecanismul reprezentat în figura 4.11, *a*, în cazul cînd se ține seama de prezența rolei, se obține gradul de mobilitate aparent:

$M_3=3n-2c_5-c_4=3 \cdot 3-2 \cdot 3-1=2$ (un grad atribuit camei *1* și altul rolei *3*).

Prin eliminarea elementului cu mișcare de prisos (rola) se deduce gradul de mobilitate real $M_3=3 \cdot 2-2 \cdot 2-1=1$.

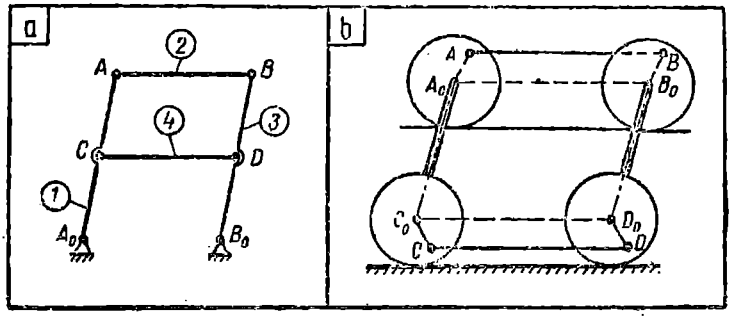


Fig. 4.10. Elemente cinematice pasive:
a — mecanism patrulater consolidat; *b* — mecanism patrulater cu bielă de cuplare.

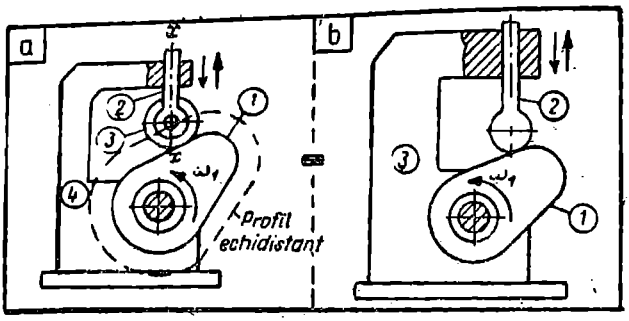


Fig. 4.11. Elemente cinematice cu mişcare de prisos (role):
a — mecanism cu camă rotativă şi tachet translant cu rolă;
b — rola rigidizată.

Cuplele cinematice pasive sînt cuplele care nu introduc condiţii suplimentare de legătură faţă de cuplele existente. Prezenţa lor este impusă de necesitatea consolidării construcţiei. De exemplu, unul din cele două lagăre (*A*, *B*) ale arborelui din figura 4.12, *a* este o cuplă pasivă, după cum tot o cuplă pasivă este una din cuplele *D* sau *E* la mecanismul şeping din figura 4.12, *b* sau două dintre cuplele *A*, *A'*, *B*, *B'* la mecanismul cardanic din figura 4.12, c.

La stabilirea gradului de mobilitate al unui mecanism, *cuplele pasive se exclud din calcul.*

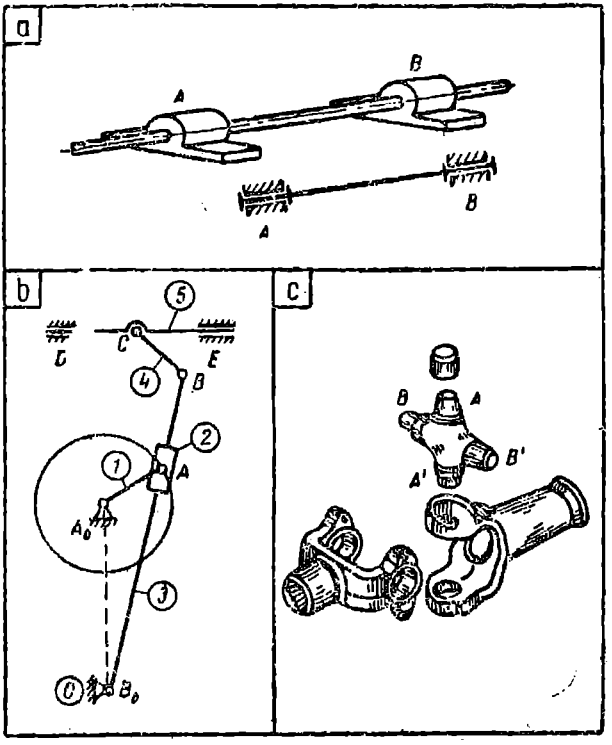


Fig. 4.12. Cuple cinematice pasive:
a — arbore cu două lagăre; *b* — mecanism şeping; *c* — mecanism cardanic.

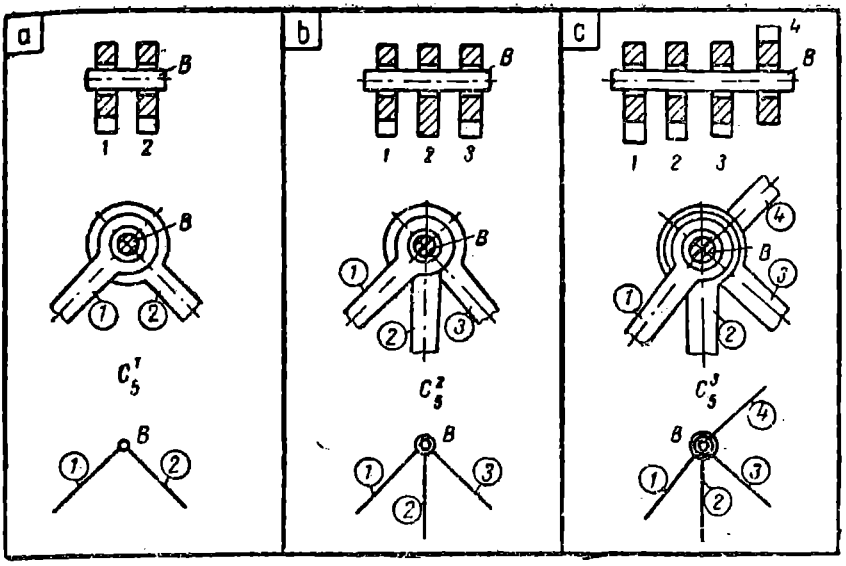


Fig. 4.13. Articulații multiple:
a — articulație simplă; *b* — articulație dublă; *c* — articulație triplă.

Exemplul 4.7. Aplicînd mecanismul șeping (fig. 4.12, *b*) relația gradului de mobilitate în ipoteza considerării tuturor cuplelor (inclusiv a cuplei pasive), se obține $M_3=3n-2c_5-c_4=3\cdot5-2\cdot8-0=-1$, adică ar însemna că mecanismul nu funcționează. Eliminînd cupla pasivă, se deduce $M_3=3\cdot5-2\cdot7-0=1$, rezultînd că mecanismul este desmodrom.

4.3. PRECIZAREA NUMĂRULUI ARTICULAȚIILOR SIMPLE ÎN CADRUL CELOR MULTIPLE

Articulațiile multiple se obțin atunci cînd pe același ax sînt montate mai mult de două elemente (fig. 4.13, *b*, *c*).

În acest caz se definește *ordinul de multiplicitate p* al multicuplei $p=i-1$ (unde i este numărul elementelor cinematice concurente în axul articulației). O multicuplă cinematică este echivalentă în calculul gradului de mobilitate al mecanismului cu un *număr de cuple simple egal cu ordinul său de multiplicitate p*.

Exemplul 4.8. Dacă la mecanismul cu bare al presei de ștanțat fin (fig. 4.14) nu s-ar ține seama de faptul că cupla *B* este multiplă (dublă) s-ar obține mobilitatea aparentă:

$$M_a=3n-2c_5-c_4=3\cdot8-2\cdot10-1=3.$$

În realitate, mecanismul are gradul de mobilitate:

$$M_a=3\cdot8-2\cdot11-1=1.$$

Elementul conducător este roata dințată *1*.

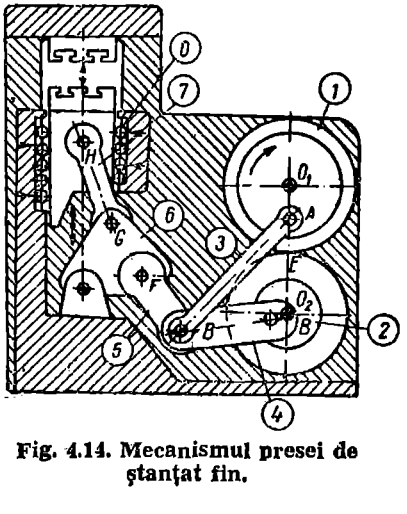


Fig. 4.14. Mecanismul presei de ștanțat fin.

4.4. DETERMINAREA FAMILIEI ŞI A GRADULUI DE MOBILITATE AL UNUI MECANISM PLAN

Prin *familia f* a unui mecanism plan se înţelege numărul de restricţi suplimentare impuse mişcărilor tuturor elementelor cinematice, necesita de montajul lor. Astfel, la mecanismele plane elementele cinematice a mişcări în acelaşi plan sau în plane paralele, caracteristică realizată de pa ralelismul axelor cuplelor de rotaţie şi de perpendicularitatea pe aceste ax a planelor ghidajelor (liniare sau curbe) şi a planelor cuplelor superioare Această caracteristică este echivalentă cu suprimarea a $f=3$ grade d libertate elementelor cinematice spaţiale izolate. Prin urmare, *mecanismel plane fac parte din familia* $f=3$, familie care trebuie determinată. În aces scop se utilizează *metoda tabelară* care constă în înscrierea într-un tabe a tuturor mişcărilor independente pe care le au elementele cinematice raportate la un sistem triortogonal de axe de coordonate *Oxyz. Familia este dată de numărul libertăţilor de mişcare care lipsesc în acelaşi timp tuturor elementelor cinematice ale mecanismului.* Metoda tabelară se aplic după ce *au fost echivalente cuplele cinematice superioare* (dacă este cazul)

Exemplul 4.9. Să se determine familia mecanismului cu camă rotativă şi tache translant cu rolă (fig. 4.15, *a*).

Rezolvare. Pentru determinarea familiei se echivalează mai întîi cupla supe rioară dintre camă şi rolă cu un element binar avînd două cuple de rotaţie: cupla A amplasată în centrul de curbură instantaneu C_{10} al profilului camei la momentu considerat şi cupla B amplasată în articulaţia rolei. S-a obţinut mecanismul echi valent manivelă-glisieră, echivalarea avînd loc numai pentru poziţia considerată Se completează apoi tabelul mişcărilor independente ale elementelor cinematice 4 şi 2 (tab. 4.1), raportate la sistemul de axe *Oxyz* ataşat articulaţiei fixe *A*.

Se observă că manivela A_0A (elementul 1) are o mişcare de rotaţie în juru axei Ox, în timp ce biela AB (elementul 4) descrie o mişcare plană de rototranslaţi în planul Oyx (deci are două translaţii după axele Oy, Oz şi o rotaţie în juru axei Ox), iar glisiera 2 are o mişcare de translaţie în lungul axei Oz.

Libertăţile de mişcare care lipsesc în acelaşi timp tuturor elementelor cine matice ale mecanismului sînt în număr de trei: ω_y, ω_z, v_x. Rezultă că mecanismu analizat este de familia $f=3$, adică este un mecanism *plan.*

Avînd cunoscută familia mecanismului, se trece la determinarea gradului d mobilitate al mecanismului cu relaţia Grubler-Cebîşev: $M_3=3n-2c_5-c_4$.

Această operaţie se execută după ce au fost eliminate atît elementele cinema tice pasive cu mişcare de prisos cît şi cuplele pasive şi au fost identificate articu laţiile multiple (dacă este cazul).

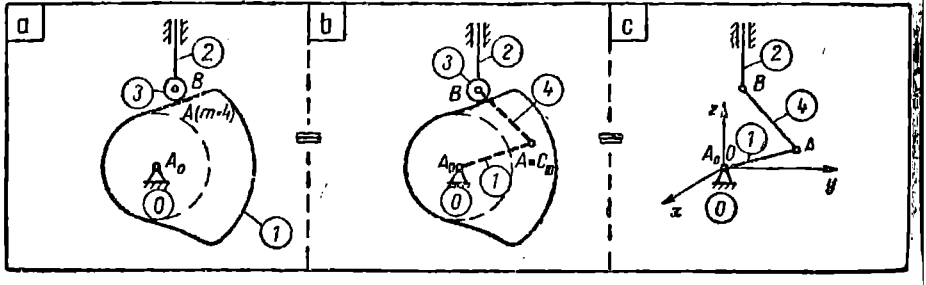


Fig. 4.15. Mecanism cu camă rotativă şi tachet translant cu rolă:
a — schema cinematică; *b* — echivalarea cuplei cinematice superioare; *c* — mecanism echiv lent cu cuple inferioare.

Mişcările independente ale elementelor cinematice care compun mecanismul echivalent

Elementul \ Mişcarea	ω_x	ω_y	ω_z	v_x	v_y	v_z
1	x					
4	x				x	x
2						x

Mecanismul este de familia $f=3$.

VERIFICAREA CUNOŞTINŢELOR

1. *Care sînt operaţiile premergătoare determinării familiei şi gradului de mobilitate al mecanismelor plane?*
2. *Cu ce este echivalentă din punct de vedere structural o cuplă de clasa a IV-a? Indicaţi cele trei soluţii posibile la mecanismele plane.*
3. *Care sînt regulile de echivalare ale unei cuple superioare la mecanismele plane în situaţiile cînd profilurile în contact ale cuplei au raze de curbură constante? Dar dacă raza de curbură a unui profil este infinită sau profilul se reduce la un punct?*
4. *Indicaţi cum se calculează gradul de mobilitate al unui mecanism plan în situaţia cînd în structura sa intră elemente cinematice pasive, elemente cinematice cu mişcare de prisos, cuple cinematice pasive şi articulaţii multiple.*
5. *Să se determine familia şi gradul de mobilitate pentru mecanismele reprezentate în figura 4.16.*

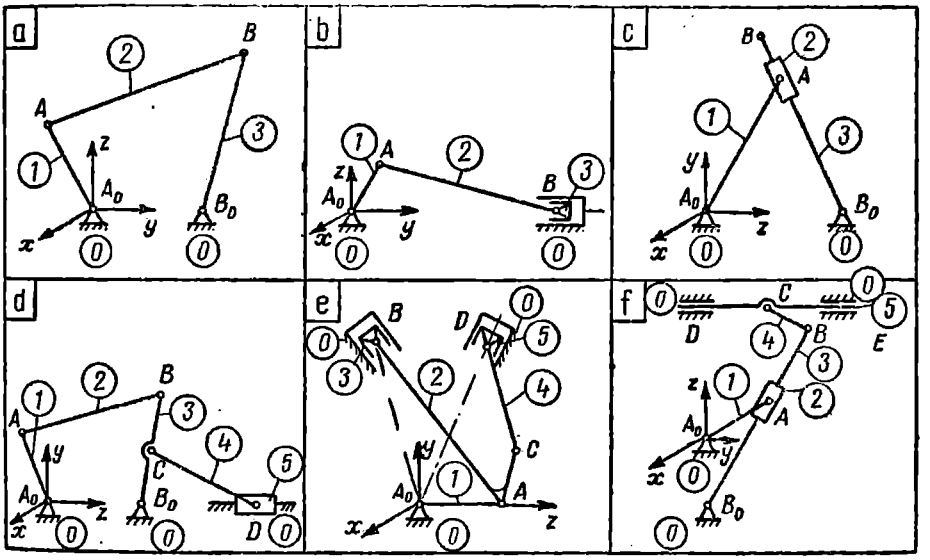


Fig. 4.16. Mecanisme plane cu bare:
a — mecanism patrulater; *b* — mecanism manivelă-piston; *c* — mecanism manivelă-culisă; *d* — mecanism transportor; *e* — mecanismul manivelă-piston al motorului în V; *f* — mecanism şeping.

5

CLASIFICAREA MECANISMELOR PLANE ARTICULATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE. ALCĂTUIREA SCHEMELOR STRUCTURALE PORNIND DE LA SCHEMELE CINEMATICE

5.1. CLASIFICAREA MECANISMELOR PLANE ARTICULATE PE BAZA GRUPELOR STRUCTURALE

5.1.1. GRUPELE STRUCTURALE

Studiul cinematic și cinetostatic al mecanismelor impune adoptarea unui *sistem unitar de clasificare structurală a mecanismelor* care apar în tehnică într-o mare varietate constructivă. O astfel de clasificare are la bază noțiunea de *grupă structurală* (denumită și *grupă Assur* — după numele celui care a propus această clasificare — *grupă cinematică sau grupă cinetostatică*).

Prin grupă structurală se înțelege o combinație de elemente și cuple cinematice formînd *lanțuri deschise cu grad de mobilitate nul* care, adăugate sau scoase dintr-un mecanism, *nu-i modifică gradul de mobilitate inițial*. Pe această bază, *orice mecanism poate fi format prin legarea succesivă la elementul conducător* (sau elementele conducătoare) *și la elementul-bază a unor grupe structurale*.

În cazul mecanismelor plane (de familia $f=3$), gradul de mobilitate — după echivalarea grupelor cinematice superioare — se calculează cu relația:

$$M_{3g}=3n-2c_5. \tag{a}$$

Deoarece mobilitatea grupei structurale este nulă iar grupa este constituită din n_g elemente și c_{5g} cuple cinematice unificate de clasa a V-a, în urma introducerii sau scoaterii grupei din mecanism, relația (a) se poate scrie:

$$M_{3g}=3(n\pm n_g)-2(c_5\pm c_{5g}). \tag{b}$$

Din egalarea relațiilor (a) și (b) rezultă:

$$\boxed{3n_g-2c_{5g}=0} \tag{5.1}$$

expresie care reprezintă *formula structurală a grupei cinematice*. Din aceasta se obține:

$$\boxed{c_{5g}=\frac{3}{2}\,n_g} \tag{5.2}$$

Analizînd relația (5.2), se observă că, pentru a se obține valori întregi pentru numărul cuplelor de clasa a V-a a grupei structurale c_{5g}, este necesar ca numărul de elemente cinematice al grupei n_5 să ia valori pare (conform tab. 5.1).

Corelații numerice între numărul de cuple (C_{58}) și numărul de elemente (n_s) ale grupei structurale

n_s	2	4	6.....
c_{53}	3	6	9.....

Considerînd succesiv perechile de numere din tabel, rezultă diferite grupe structurale, după cum urmează:

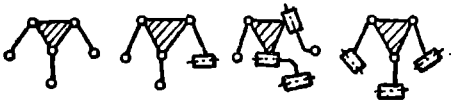
— pentru $n_s=2$ elemente și $c_{52}=3$ cuple se obține *diada;*

— pentru $n_s=4$ elemente și $c_{58}=6$ cuple se formează *triada* și *tetrada;*

— pentru $n_s=6$ elemente și $c_{58}=9$ cuple rezultă *triada dublă, tetrada complexă, pentada, hexada* etc.

Reprezentarea convențională a acestor grupe (conform STAS 1543-75) este redată în tabelul 5.2.

TABELUL 5.2

Nr. crt.	Denumirea	Reprezentarea convențională
1	Diada (clasa a II-a, ordinul 2)	
2	a - Triada simplă fără și cu cuple de translație (clasa a III-a, ordinul 3)	
	b - Triada dublă, triplă (clasa a III-a, ordinele 4 și 5)	
3	Tetrade (clasa a III-a, ordinele 2,3)	
4	Pentade (clasa a V-a, ordinele 3, 2)	
5	Hexade (clasa a VI-a, ordinul 3)	

Dintre aceste grupe structurale cea mai răspîndită este diada.

La fiecare grupă structurală este necesar să se precizeze *clasa* și *ordinul grupei*. Astfel, în cazul diadei:

— clasa este dată de rangul maxim al elementelor cinematice ($j_{max}=2$) deci diada este o grupă structurală de *clasa a II-a;*

— ordinul este dat de numărul cuplelor exterioare (marginale) libere numite *și cuple potențiale sau semicuple* ($c_{68}=2$); rezultă că diada are *ordinul 2.*

Prin urmare, diada reprezintă o grupă structurală de clasa a *II-a*/ordinul 2.

Convențional se admite că elementul-bază și elementul conducător formează un *mecanism de clasa I* numit și *mecanism fundamental (MF)* – figura 5.1.

Drept consecință, în conformitate cu principiul enunțat anterior, *mecanismele se formează adăugînd la mecanismul fundamental una sau mai multe grupe structurale.*

$$MF+\sum_{1}^{n}\text{grupe structurale},$$

5.1.2. DIADA ȘI PRINCIPALELE EI ASPECTE

Diada este grupa structurală formată din $n_s=2$ elemente cinematice (2, 3) de rangul $j=2$ și $v_{5s}=3$ cuple, *A, B, C* de clasa a *V*-a — figura 5.2.

Cupla *B*, care leagă între cele două elemente cinematice *2* și *3*, se numește *cuplă interioară.* Cuplele *A* și *C*, numite *cuple exterioare* (poten-

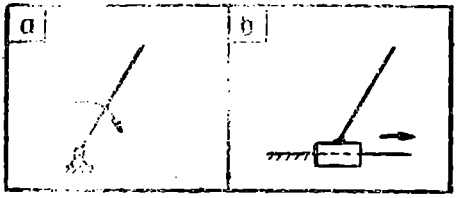


Fig. 5.1. Mecanisme fundamentale:
a — cu cuplă de rotație; *b* — cu cuplă de translație.

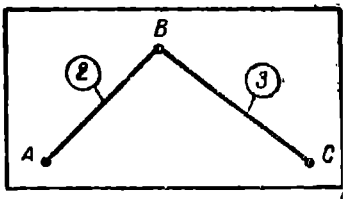


Fig. 5.2. Diada.

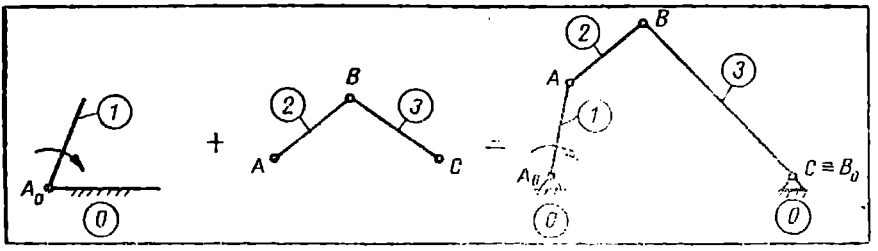


Fig. 5.3. Modul de legare al diadei la un mecanism fundamental și elementul bază.

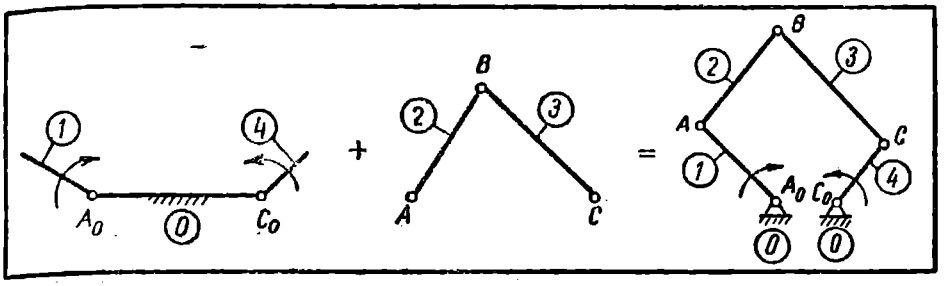


Fig. 5.4. Modul de legare al diadei la două mecanisme fundamentale.

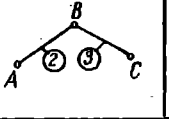
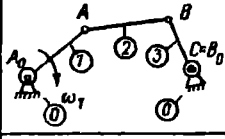
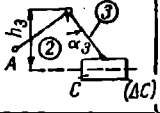
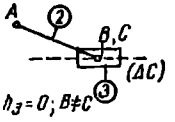
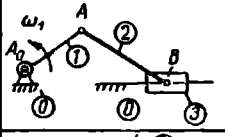
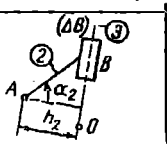
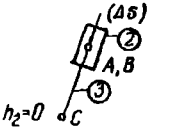
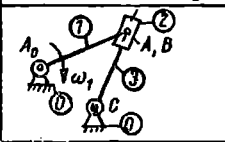
țiale), pot fi utilizate pentru legarea diadei la un mecanism fundamental și la elementul-bază (fig. 5.3), fie la două mecanisme fundamentale (fig. 5.4).

În primul caz se obține *mecanismul patrulater*, iar în al doilea caz rezultă *mecanismul pentalater*.

Diada apare în practică sub forma mai multor *aspecte*, în funcție de *felul cuplelor* de clasa a V-a pe care le conține (de rotație R sau de translație T) și de *poziția lor* în structura grupei (cuple marginale sau interioare). În cazul elementelor mărginite de o cuplă de rotație și una de translație, lungimea elementului poate fi redusă la zero rezultînd soluții la care cuplele sînt *suprapuse*. În tabelul 5.3 sînt date cele mai utilizate aspecte ale diadei precum și mecanismele caracteristice rezultate prin legarea lor la un mecanism fundamental cu cuplă de rotație.

Mecanismele care au în componența lor numai grupe structurale de clasa a II-a/ordinul 2 sînt clasificate ca *mecanisme de clasă a IIa/ordinul 2*.

TABELUL 5.3

Aspectul		*Schema cinematică*	*Schema cinematică cu cuplele suprapuse*	*Mecanismele caracteristice*	
Nr	*Caracteristica*			*Schema cinematică*	*Denumire*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	*3 cuple de rotație RRR*				*Mecanism patrulater 4R*
2	*1 cuplă de translație exterioară RRT*				*Mecanism manivelă pieton R(RRT)*
3	*1 cuplă de translație interioară RTR*				*Mecanism cu culisă (oscilantă sau rotativă) R(RTR)*

5.2. ALCĂTUIREA SCHEMELOR STRUCTURALE PORNIND DE LA SCHEMELE CINEMATICE

Pentru *clasificarea structurală a mecanismelor* se utilizează schemele *structurale*, adică reprezentările convenţional plane ale elementelor cinematice componente şi ale cuplelor cinematice echivalente (unificate). Schema structurală se alcătuieşte pornind de la schema cinematică a mecanismului, adică de la reprezentarea configuraţiei geometrice a elementelor şi cuplelor pentru un anumit sens de mişcare.

Scopul clasificării mecanismelor plane este de a depista grupele structurale ce compun mecanismul respectiv, deoarece fiecare grupă structurală (diada, triada, tetrada etc.) are *metode specifice* pentru determinarea poziţiilor, vitezelor, acceleraţiilor, forţelor de inerţie, reacţiunilor din cuple etc.

La *stabilirea schemei structurale a mecanismelor plane* se parcurg următoarele etape:

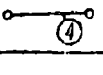
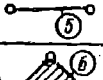
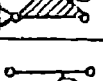
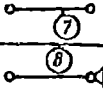
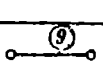
— echivalarea cuplelor cinematice superioare (de clasa a *IV*-a) printr-un element cinematic binar (element cu două cuple de clasa a *V*-a);

— eliminarea elementelor cinematice pasive, a cuplelor pasive sau a elementelor cu mişcare de prisos (rolele) şi precizarea numărului şi ordinului de multiplicitate ale articulaţiilor multiple;

— transformarea tuturor cuplelor cinematice de translaţie în *cuple de rotaţie*;

— reprezentarea elementelor cinematice ca poligoane cu atîtea *vîrfuri* cîte cuple au.

TABELUL 5.4

Numărul elementului	Elementele cu care se leagă	Simbolul grafic în schema structurală
1	0; 3; 9	
2	0; 9; 4	
3	1; 4; 5	
4	2; 3	
5	3; 6	
6	0; 5; 7	
7	5; 8	
8	0; 7	
9	1; 2	

Clasa şi ordinul unui mecanism-motor sînt determinate de clasa şi ordinul celei mai complexe grupe structurale care intră în componenţa mecanismului. În acest scop:

— se precizează elementul conducător (sau elementele conducătoare);

— se porneşte de la *cel mai îndepărtat element cinematic* faţă de elementul conducător şi se *extrag* succesiv grupele structurale pînă se ajunge la elementul conducător (operaţia de extragere a grupelor structurale se execută identificînd existenţa lor în succesiunea „de la grupa cea mai simplă — diada — către grupele mai complexe — triada, tetrada ş.a.m.d.“, cu condiţia ca, după extragerea unei grupe, ceea ce rămîne să fie tot un mecanism).

Exemplul 5.1. Să se determine clasa şi ordinul mecanismului presei de ştanţat fin (fig. 5.5, *a*).

Rezolvare. Se echivalează cupla superioară de clasa a *IV*-a din *E* ($m=4$) printr-un element cinematic binar 9. Apoi

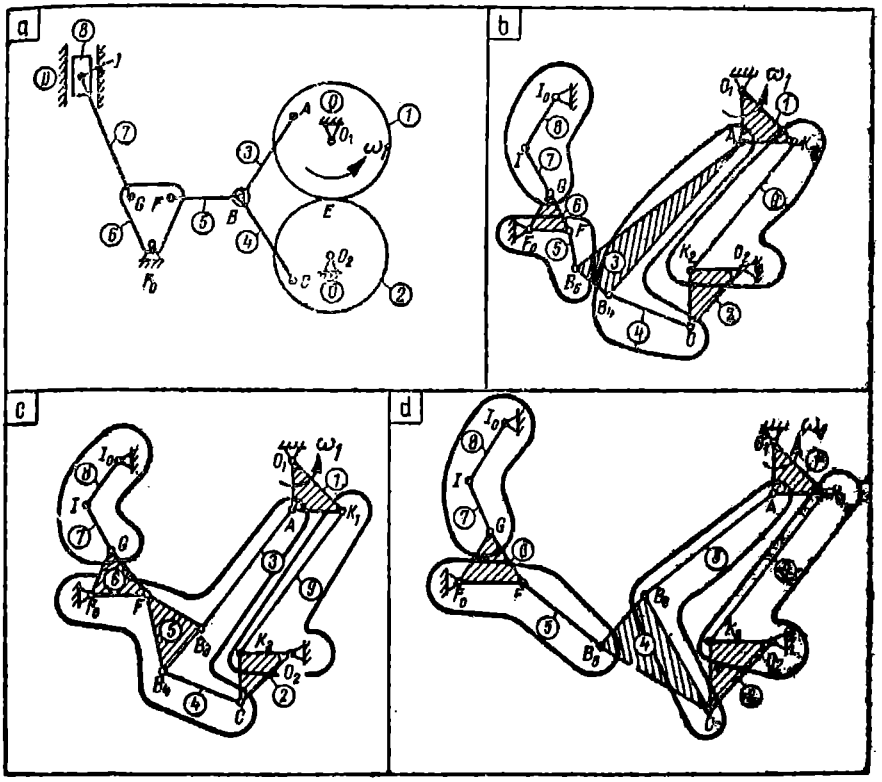


Fig. 5.5. Determinarea clasei şi ordinului mecanismului presei de ştanţat fin:
a — schema cinematică; *b* — modul de repartizare la elementul 3 al articulaţiei duble *B*; *c* — modul de repartizare la elementul 5 al articulaţiei duble *B*; *d* — modul de repartizare la elementul 4 al articulaţiei duble *B*.

se întocmeşte tabelul rangurilor elementelor în care se notifică atît elementele cu care se leagă fiecare element cinematic al schemei structurale cît şi simbolul grafic ce se va utiliza în această schemă. Acest simbol grafic ţine seama de prescripţiile înlocuirii cuplelor de translaţie prin cuple de rotaţie şi respectiv figurării elementului ca un poligon cu atîtea vîrfuri cîte cuple are (tab. 5.4).

În continuare se construieşte schema structurală (fig. 5.5, *b*) şi pe baza ei se determină clasa şi ordinul mecanismului identificîndu-se diadele *(8, 7)*, *(6, 5)*, *(3, 4)*, *(2, 9)* şi mecanismul fundamental *(1, 0)*. Rezultă că mecanismul este mecanism-motor de clasa a II-a/ordinul 2.

Observaţii.

1. În situaţia analizată, articulaţia dublă din *B* a fost repartizată elementului *3* (articulaţiile B_5 şi B_4), care astfel se leagă cu elementele *5*, respectiv *4*. Dacă articulaţia *B* se repartizează elementului *5* (articulaţiile B_3 şi B_4) se obţine cazul reprezentat în figura 5.5, *c*. Mecanismul rezultat este de clasa a *III*-a/ordinul 3 deoarece se identifică în structura sa diada (*8*, *7*), triada (*6*, *5*, *4*, *3*), diada (*2*, *9*) şi mecanismul fundamental *(1, 0)*. În ipoteza că articulaţia dublă *B* se repartizează elementului *4* (articulaţiile B_3 şi B_5 — fig. 5.5, *d*) se obţine un mecanism de clasa a

II-a/ordinul 2 constituit din diadele *(8, 7), (6, 5), (4, 3), (2, 9)* și mecanismul fundamental *(1, 0)*.

În practică, atunci cînd apar situații similare celei prezentate anterior, se face calculul cinematic și cinetostatic al mecanismului pentru cazul existenței articulației multiple (pentru exemplul analizat mecanismul fiind de clasa a *II*-a/ordinul 2).

2. Scriind structura mecanismului analizat sub formă simbolică

$$\longleftarrow \text{analiza structurală cinetostatică}$$

$$MF(1,\ 0)+D(2,\ 9)+(3,\ 4)+D(6,\ 5)+D(8,\ 7)$$

$$\longrightarrow \text{analiza cinematică}$$

se reţin următoarele *reguli generale:*

— Analiza cinematică a mecanismului se face succesiv pornind de la mecanismul fundamental *MF* către grupa structurală cea mai depărtată.

— Analiza structurală și cinetostatică a mecanismului se face succesiv pornind de la grupa structurală cea mai depărtată către mecanismul fundamental.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Ce se înțelege prin noțiunea de grupă structurală?*
2. *Care este principiul de constituire a mecanismelor luînd drept criteriu grupele structurale?*
3. *Indicați ce fel de grupă structurală este diada și care sînt principalele ei aspecte.*
4. *Formulați algoritmul pentru stabilirea schemei structurale a mecanismelor plane.*
5. *Două mecanisme care au aceeași schemă structurală au și aceeași schemă cinematică?*
6. *Să se determine clasa și ordinul mecanismelor din figura 5.6.*

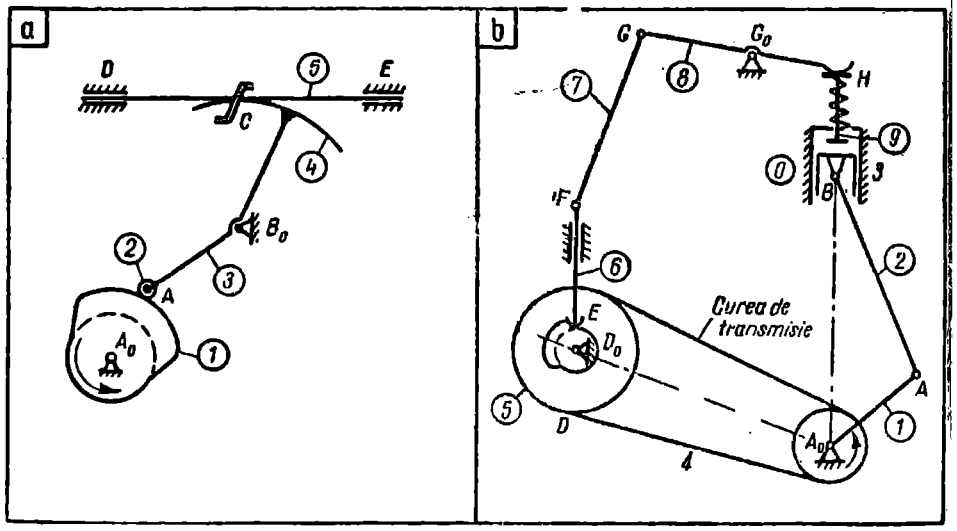


Fig. 5.6. Mecanisme plane complexe:

a — mecanism cu camă pentru acționarea longitudinală a saniei de la strungul automat SARO 15—25—42; *b* — mecanismul de distribuție al autovehiculelor.

PARTEA A TREIA
ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR

Obiectul analizei cinematice. Analiza cinematică are ca obiect de studiu determinarea *poziţiilor, vitezelor* şi *acceleraţiilor elementelor conduse ale mecanismelor* (fără a ţine seama de forţele care le condiţionează mişcarea), cunoscînd mişcarea elementului conducător (sau a elementelor conducătoare). Avînd în vedere faptul că mecanismele se pot descompune în grupe structurale, analiza cinematică se reduce la studiul acestor grupe, cu scopul determinării traiectoriilor, vitezelor liniare şi a acceleraţiilor liniare ale diverselor puncte caracteristice mecanismului, precum şi a vitezelor unghiulare şi a acceleraţiilor unghiulare ale elementelor cinematice.

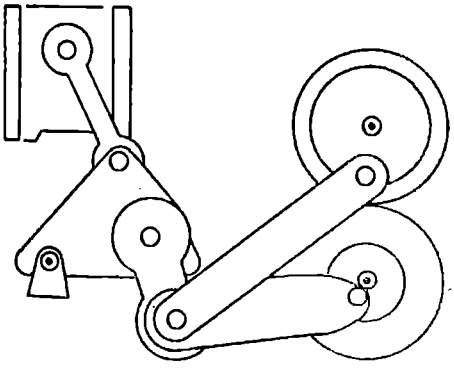
Analiza cinematică se poate efectua grafic, grafoanalitic sau analitic, primele două metode avînd o utilizare mai largă datorită simplităţii lor.

Determinarea traiectoriilor descrise de punctele caracteristice ale mecanismului pentru un ciclu cinematic este necesară atît *dimensionării subansamblurilor maşinii* — care nu trebuie să vină în contact cu elementele mecanismului ajunse în poziţiile extreme — cît şi *stabilirii spaţiului* (gabaritului) ce urmează a fi ocupat de mecanism în cadrul maşinii (exemplu: analiza traiectoriilor descrise de diversele puncte ale mecanismului manivelă-piston în raport cu carterul maşinii).

Cunoaşterea vitezelor diferitelor puncte şi elemente ale mecanismului este utilă:

— *direct,* pentru stabilirea vitezei de deplasare a maşinii din care face parte mecanismul (exemple: vehicule rutiere, de cale ferată sau spaţiale) sau pentru calculul vitezei tehnologice de deplasare a elementului condus (exemplu: viteza de aşchiere la maşinile-unelte);

— *indirect,* pentru calculul de dimensionare al elementelor cinematice şi studiul dinamic al mecanismului, deoarece determinarea vitezelor precede stabilirea acceleraţiilor.



Studiul acceleraţiilor diferitelor puncte şi elemente cinematice ale mecanismului este neaesar determinării forţelor de inerţie care, la maşinile cu turaţii mari ating valori foarte ridicate.

Scări utilizate în construcţiile grafice. a) Pentru reprezentarea grafică a unor mărimi necesare studiului mecanismelor (exemple: lungime, viteză, acceleraţie, forţă, cuplu etc.) se utilizează *scări* de transformare a mărimilor reale (măsurate în unităţile de măsură ale Sistemului Internaţional) în *segmente pe desen* (măsurate în mm). Prin urmare, scara (notată cu litera k) se defineşte prin relaţia:

$$k = \frac{\text{mărimea reală (SI)}}{\text{mărimea pe desen (mm)}}.$$

Convenţional, *mărimile măsurate pe desen se notează între paranteze simple*, iar mărimile reale fără paranteze. De exemplu:

AB înseamnă lungimea reală a elementului cinematic AB (în metri);

(AB) înseamnă lungimea segmentului corespondent de pe desen (în milimetri).

Indicarea *naturii* mărimii reprezentate grafic se face ataşînd scării k un indice literal. De exemplu: k_l (scara lungimilor), k_v (scara vitezelor), k_a (scara acceleraţiilor) ş.a.m.d. Scările utilizate în studiul mecanismelor sînt indicate în tabelul 1.

TABELUL 1

Scările utilizate în studiul mecanismelor

Mărimea fizică	Scara	Relaţia de scară	Mărimea fizică	Scara	Relaţia de scară
lungime l, s [m]	$k_l \left[\frac{\text{m}}{\text{mm}}\right]$	$l = k_l\,(l)$ $s = k_l\,(s)$	forţă F [N]	$k_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right]$	$F = k_F\,(F)$
viteză liniară v [ms^{-1}]	$k_v \left[\frac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	$v = k_v\,(v)$	cuplu M [Nm]	$k_M \left[\frac{\text{Nm}}{\text{mm}}\right]$	$M = k_M\,(M)$
acceleraţie liniară a [ms^{-2}]	$k_a \left[\frac{\text{ms}^{-2}}{\text{mm}}\right]$	$a = k_a\,(a)$	moment de inerţie I [kgm^2]	$k_I \left[\frac{\text{kgm}^2}{\text{mm}}\right]$	$I = k_I\,(I)$
viteză unghiulară ω [rad s^{-1}]	$k_\omega \left[\frac{\text{rad s}^{-1}}{\text{mm}}\right]$	$\omega = k_\omega\,(\omega)$	energie E [J]	$k_E \left[\frac{\text{J}}{\text{mm}}\right]$	$E = k_E\,(E)$
acceleraţie unghiulară ε [rad s^{-2}]	$k_\varepsilon \left[\frac{\text{rad s}^{-2}}{\text{mm}}\right]$	$\varepsilon = k_\varepsilon\,(\varepsilon)$	putere P [W]	$k_P \left[\frac{\text{W}}{\text{mm}}\right]$	$P = k_P\,(P)$

De exemplu:

— un element cinematic $AB = 0{,}5$ m se reprezintă, la scara lungimilor $k_l = \frac{1}{30}\frac{\text{m}}{\text{mm}}$, printr-un segment $(AB) = \frac{AB}{k_l} = \frac{0{,}5}{\frac{1}{30}} = 15$ mm;

— un segment $(AB) = 50$ mm reprezintă, la scara $k_l = \frac{1}{100}\frac{\text{m}}{\text{mm}}$, o lungime $AB = k_l(AB) = \frac{1}{100}(50) = 0{,}5$ m.

6

TRASAREA TRAIECTORIILOR

6.1. TRASAREA TRAIECTORIILOR LA MECANISMELE DE CLASA I (FUNDAMENTALE)

Mecanismele fundamentale sînt elemente cinematice monare prevăzute cu o cuplă de rotaţie — figura 6.1. *a* sau cu o cuplă de translaţie — figura 6.1. *b*.

Traiectoriile diferitelor puncte A, B, C... aparţinînd elementelor sînt:

— *cercuri concentrice* (C_A), (C_B), (C_C)... la mecanismele fundamentale cu cuplă de rotaţie; elementul care efectuează această mişcare se numeşte *manivelă;*

— *drepte* (ΔA), (ΔB), (ΔC)... *paralele cu ghidajul* (Δ_0) la mecanismele fundamentale cu cuplă de translaţie; elementul căruia îi aparţin aceste puncte poartă denumirea de *glisieră* sau *piston.*

6.2. DETERMINAREA POZIŢIILOR UNOR MECANISME DE CLASA A II-a/ORDINUL 2 ŞI A TRAIECTORIILOR PUNCTELOR CARACTERISTICE

Determinarea poziţiilor la principalele mecanisme de clasa a II-a/ordinul 2 se face cu ajutorul *metodei intersecţiilor* (de cercuri şi drepte).

6.2.1. MECANISMUL PATRULATER 4R

Notînd laturile patrulaterului cu $a=A_0A$, $b=AB$, $c=BB_0$, $d=A_0B_0$ (fig. 6.2, *a*) şi perimetrul lui cu $p=a+b+c+d$, se pot demonstra *două condiţii de existenţă a manivelei:*

$$d=l_{min}, \text{ adică } d\leqslant a,\ d\leqslant b,\ d\leqslant c$$

$$l_{min}+l_{max}\leqslant\frac{p}{2},$$

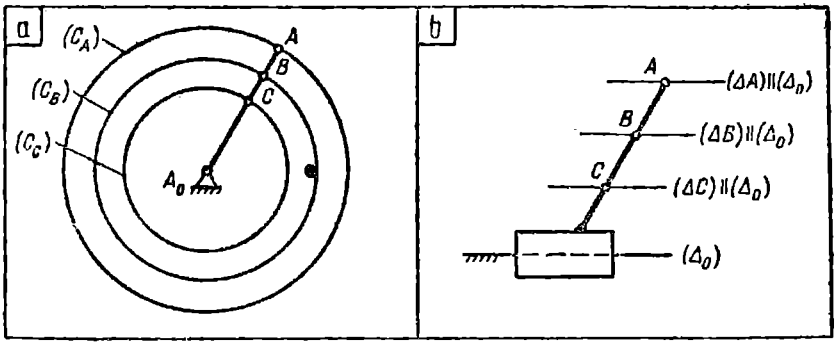


Fig. 6.1. Traiectoriile descrise de punctele mecanismelor fundamentale:
a — cu cuplă de rotaţie; *b* — cu cuplă de translaţie.

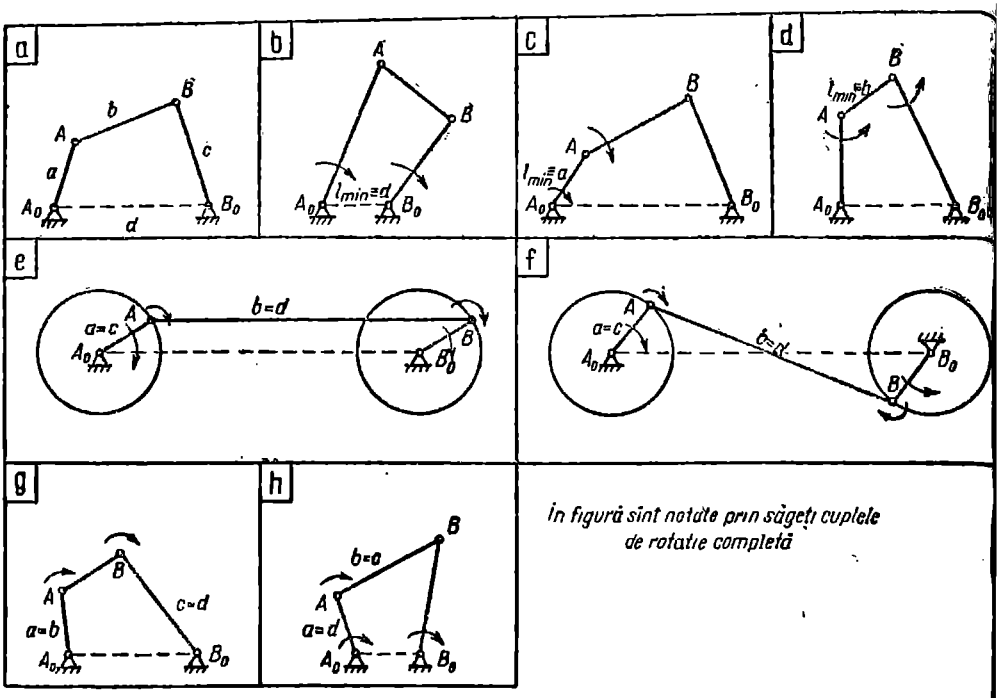


Fig. 6.2. Variantele constructive ale mecanismului patrulater articulat:
a — schema generală; *b* — mecanism dublă-manivelă; *c* — mecanism manivelă-balansier; *d* — mecanism dublu balansier complex; *e* — mecanism paralelogram; *f* — mecanism antiparalelogram; *g* — mecanism patrulater simetric; *h* — mecanism Gallowey.

unde l_{min} și l_{max} reprezintă lungimile minimă, respectiv maximă, ale laturilor patrulaterului. Patrulaterul care satisface și a doua condiție se numește *patrulater complex*, iar cel care nu o satisface poartă denumirea de *patrulater simplu*.

După poziția laturii de lungime minimă, se deosebesc următoarele mecanisme patrulatere complexe:

— *mecanisme dublă-manivelă*, cînd $l_{min} \equiv d$ (elementul bază) — figura 6.2, *b*;

— *mecanisme manivelă-balansier*, cînd $l_{min} \equiv a$ (manivela) — figura 6.2, *c*;

— *mecanisme dublu-balansier complex*, cînd $l_{min} \equiv b$ (biela) — figura 6.2, *d*.

Mecanismele patrulater simple, la care $l_{min}+l_{max} > \frac{p}{2}$, formează numai *mecanisme dublu-balansier* simple cu articulațiile *A* și *B* ale bielei de rotație incompletă.

În cazul limită, cînd $l_{max}+l_{max}=\frac{p}{2}$, se obțin:

— *mecanismul paralelogram* (fig. 6.2, *e*) și *mecanismul antiparalelogram* (fig. 6.2, *f*), la care $a=c$ și $b=d$, deosebirea dintre ele constînd în sensul rotației elementelor *a* și *c*;

— *mecanismul patrulater simetric* (fig. 6.2, *g*) și mecanismul *Gallowey* (fig. 6.2, *h*), primul de tip manivelă-balansier $a=b$, $c=d$ și al doilea du-

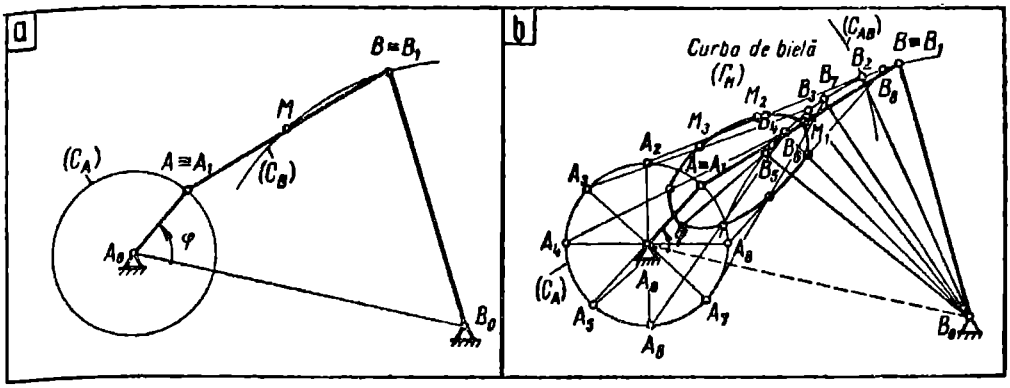


Fig. 6.3. Determinarea poziţiilor la mecanismul patrulater:
a — trasarea mecanismului pentru o poziţie dată; *b* — determinarea poziţiilor succesive şi a curbei de bielă.

blă-manivelă cu $a=d$, $b=c$, acesta din urmă avînd proprietatea că la o rotaţie a manivelei A_0A cu 4π, manivela B_0B se roteşte cu 2π.

Succesiunea operaţiilor grafice pentru determinarea poziţiilor mecanismului patrulater este următoarea (fig. 6.3):

— Se reprezintă mecanismul A_0ABB_0 la scara lungimilor k_l arbitrar aleasă, cunoscînd poziţiile articulaţiilor fixe A_0, B_0, lungimile elementelor A_0A, AB, BB_0 şi unghiul φ (unghiul de rotire al elementului conducător A_0A — fig. 6.3, *a*).

— Se trasează cercul (C_A) cu centrul în A_0 şi raza A_0A şi cercul (C_B) cu centrul în B_0 şi raza B_0B: $(C_A)_{A_0}^{(A_0A)}$; $(C_B)_{B_0}^{(B_0B)}$.

— Considerînd punctul $A=A_1$ ca poziţie de referinţă, se împarte circumferinţa (C_A) într-un număr cît mai mare de părţi egale, de regulă 12—24 părţi (în fig. 6.3, *b*, pentru simplificarea construcţiei grafice s-au folosit opt părţi egale).

— Se ia în compas lungimea bielei (AB) şi punînd piciorul compasului în poziţiile succesive ale lui A_i $(i=1, 2\ldots)$ se determină, cu vîrful compasului, poziţiile corespunzătoare B_i $(i=1, 2\ldots)$ de pe cercul (C_B), la intersecţia arcelor de cerc (C_{AB}) cu centrele în A_i şi raza AB cu cercul (C_B)

$$B_i \equiv (C_{AB})_{A_i}^{(AB)} \cap (C_B)_{B_0}^{(B_0B)}.$$

Observaţie. Poziţiile succesive ocupate de un punct oarecare M aparţinînd bielei AB (de exemplu punctul situat la mijlocul bielei) rezultă luînd în compas lungimea (AM) care se transpune pe fiecare poziţie A_iB_i $(i=1, 2\ldots)$ a bielei. Se obţin astfel o serie de puncte M_i $(i=1, 2\ldots)$ care, unite cu o linie continuă, dau curba de bielă (Γ_M).

6.2.2. MECANISMUL MANIVELĂ-PISTON (GLISIERĂ) R (RRT)

Acest mecanism este foarte răspîndit în tehnică şi este realizat în două variante constructive principale: *dezaxat* (axa de rotaţie a manivelei este deplasată faţă de direcţia ΔB a ghidajului cu excentricitatea e — fig. 6.4, *a*) şi *axial* (cînd ΔB trece prin A_0, adică $e=0$ — fig. 6.4, *b*).

Pentru determinarea poziţiilor mecanismului, se parcurge următoarea succesiune de operaţii grafice (fig. 6.5):

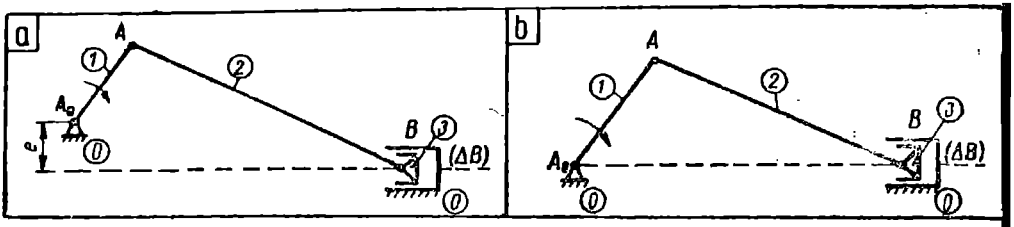


Fig. 6.4. Variantele constructive ale mecanismului manivelă-piston:
a — mecanism dezaxat; *b* — mecanism axial.

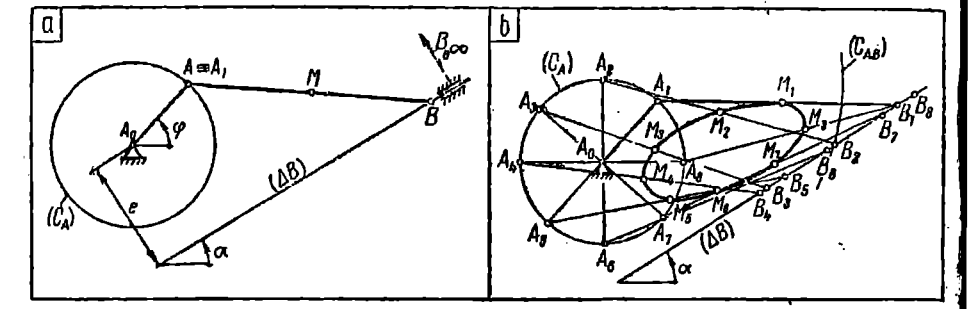


Fig. 6.5. Determinarea pozițiilor la mecanismul manivelă-piston:
a — trasarea mecanismului pentru o poziție dată; *b* — determinarea pozițiilor succesive și a curbei de bielă.

— Se reprezintă mecanismul $A_0ABB_{0\infty}$ la scara lungimilor arbitrar aleasă k_l cunoscînd poziția cuplei fixe A_0, lungimile elementelor A_0A, AB, unghiul de rotire φ al manivelei și înclinarea α a ghidajului ΔB — fig. 6.5, *a*.

— Se trasează cercul (C_A) cu centrul în A_0 și raza A_0A a cărui circumferință se împarte într-un număr de diviziuni egale (de exemplu opt părți), rezultînd punctele A_i $(i=1, 2 \dots 8)$ — fig. 6.5, *b*.

— Se ia în compas lungimea bielei (AB) și punînd piciorul compasului în pozițiile succesive $A_i \in (C_A)$ se determină, cu vîrful compasului, pozițiile corespunzătoare B_i $(i=1, 2 \dots 8)$ de pe dreapta (ΔB), la intersecția arcelor de cerc (C_{AB}) cu centrele în A_i și raza AB ou dreapta (ΔB)

$$B_i=(C_{AB})^{(AB)}_{A_i} \cap (\Delta B).$$

— Curba de bielă (Γ_M) descrisă de un punct $M \in (AB)$ se obține luînd în compas lungimea (AM) — care se transpune pe fiecare poziție A_iB_i $(i=1, 2 \dots 8)$ a bielei — și unind cu o linie continuă punctele M_i $(i=1, 2, \dots 8)$ rezultate.

6.2.3. MECANISMUL MANIVELĂ-CULISĂ R (RTR)

Acest mecanism este realizat în două variante constructive principale:

— *mecanism manivelă-culisă oscilantă*, cînd $A_0B_0 \geqslant A_0A$ (fig. 6.6, *a*, exemplu: toate mecanismele șeping);

— *mecanism manivelă-culisă rotativă*, cînd $A_0B_0 < A_0A$ (fig. 6.6, *b*, exemplu: motoarele cu cilindri rotativi).

În prima variantă există două poziții extreme ale culisei, care sînt simetrice față de A_0B_0 culisa avînd o mișcare oscilantă, iar în varianta a doua, culisa *3* se rotește permanent în același sens.

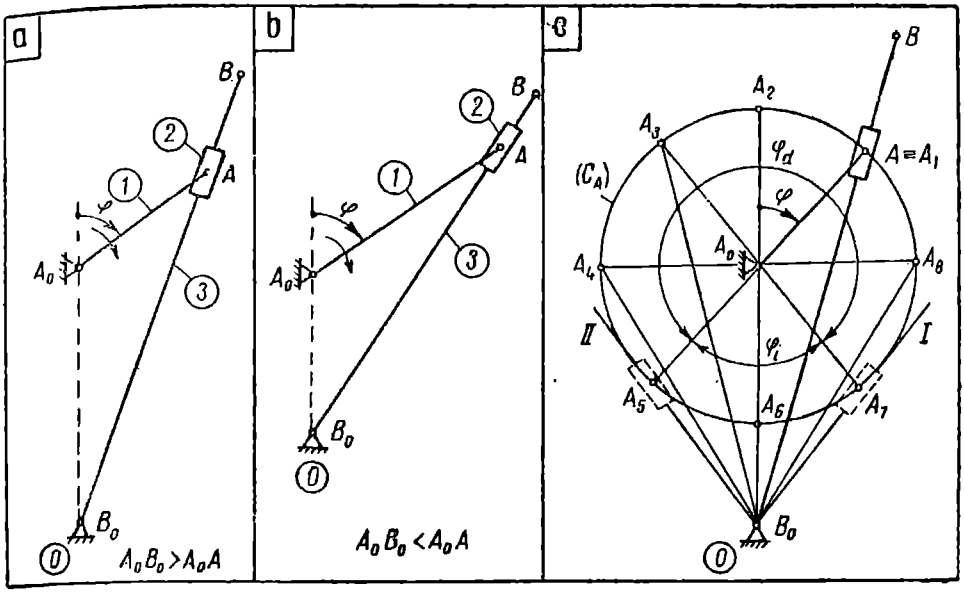


Fig. 6.6. Mecanismul manivelă-culisă:
a — culisă oscilantă; *b* — culisă rotativă; *c* — determinarea pozițiilor mecanismului.

Pentru determinarea pozițiilor mecanismului se procedează în felul următor (fig. 6.6, *c*):

— Se trasează mecanismul la scara lungimilor k_l arbitrar aleasă cunoscînd pozițiile articulațiilor fixe A_0, B_0, lungimea manivelei A_0A și unghiul ei de rotație φ.

— Se construiește cercul (C_A) cu centrul în A_0 și rază A_0A și i se împarte circumferința într-un număr cît mai mare de părți egale (de exemplu 8) notate $A_i (i=1, 2, \ldots 8)$.

— Se unește fiecare poziție $A_i (i=1, 2 \ldots 8)$ cu articulația fixă B_0 rezultînd pozițiile succesive ale culisei.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Ce traiectorii descriu punctele aparținînd manivelei și pistonului?*
2. *Care este metodologia de trasare a curbelor de bielă la mecanismele patrulater și manivelă-piston?*

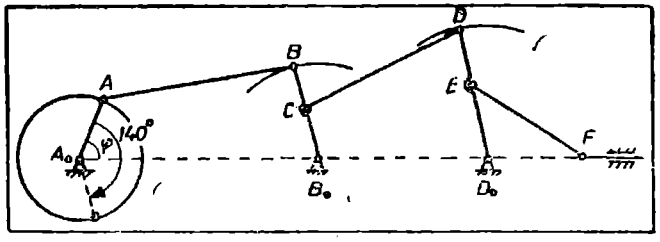


Fig. 6.7. Mecanism patrulater lungit cu două diade.

3. *Se dă mecanismul patrulater lungit cu două diade din figura 6.7, la care sînt cunoscute dimensiunile elementelor* $A_0A=0{,}14$ m, $AB=0{,}44$ m, $BB_0=0{,}22$ m, $BC=0{,}10$ m, $CD=0{,}4$ m, $DD_0=0{,}3$ m, $DE=0{,}12$ m, $EF=0{,}3$ m, *poziţiile articulaţiilor fixe* $A_0B_0=0{,}54$ m, $B_0D_0=0{,}38$ m şi *poziţia manivelei* $\varphi=73°$. *Se cere să se determine noua poziţie a mecanismului dacă manivela se roteşte în sens orar cu 140°.*

7

BAZELE CINEMATICII GRAFOANALITICE

Pentru determinarea grafoanalitică a vitezelor şi acceleraţiilor liniare ale unor puncte caracteristice ale *mecanismelor plane*, precum şi a vitezelor şi acceleraţiilor unghiulare ale elementelor cinematice componente este necesară cunoaşterea distribuţiei de viteze şi acceleraţii pe elementele cinematice care pot fi în mişcare de *translaţie* (rectilinie şi circulară), de *rotaţie* sau în *mişcare plană generală* (de rototranslaţie plană).

7.1. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIŞCARE DE TRANSLAŢIE RECTILINIE

Se consideră un element cinematic monar legat la bază prin cuplă de translaţie (fig. 7.1, *a*).

Distribuţia de viteze şi acceleraţii este determinată dacă se cunoaşte viteza şi acceleraţia unui punct aparţinînd elementului (de exemplu viteza şi acceleraţia punctului A reprezentate la scara vitezelor k_v, respectiv la scara acceleraţiilor k_a, prin vectorii $\overline{(Aa)}=\frac{\bar{v}_A}{k_v}$ şi $\overline{(Aa')}=\frac{\bar{a}_A}{k_a}$. Punctele de pe element, de exemplu B, C ..., au *vitezele şi acceleraţiile egale şi paralele cu cele cunoscute;*

$$\bar{v}_A \# \bar{v}_B \# \bar{v}_C;\ \bar{a}_A \# \bar{a}_B \# \bar{a}_C.$$

Viteza şi acceleraţia *aceluiaşi punct sînt în prelungire*, unghiul dintre suporturile vectorilor respectivi indicînd *felul mişcării*. Astfel, cînd $\alpha=0°$, mişcarea este *accelerată* (fig. 7.1, *a*), iar cînd $\alpha=180°$, mişcarea este *încetinită* (fig. 7.1, *b*). Atunci cînd acceleraţia mişcării este nulă, elementul cinematic se află în mişcare *uniformă* (fig. 7.1, *c*).

Dacă ghidajul (Δ_0) este *fix*, vitezele şi acceleraţiile punctelor sînt *absolute*, iar dacă ghidajul este *mobil*, vectorii reprezintă vitezele şi acceleraţiile *relative* ale punctelor respective faţă de ghidajul *considerat fix*.

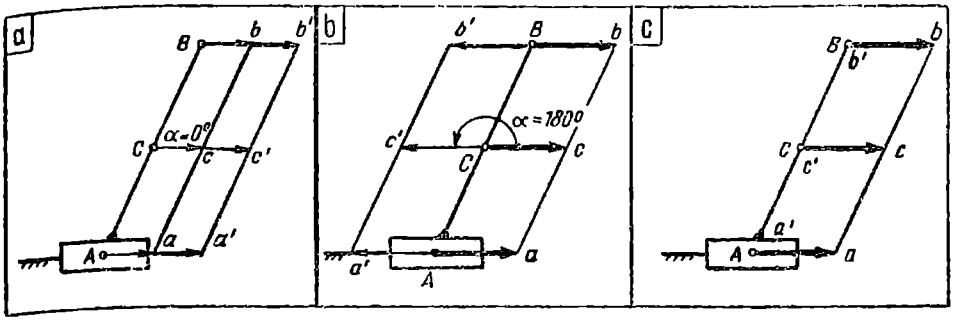


Fig. 7.1. Distribuția de viteze și accelerații la elementul cinematic în mișcare de translație:
a — mișcare accelerată; *b* — mișcare încetinită; *c* — mișcare uniformă.

7.2. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIȘCARE DE TRANSLAȚIE CIRCULARĂ

Cunoscînd viteza și accelerația unui punct de pe element (de exemplu A — fig. 7.2, *a*), distribuția de viteze și accelerații pe acest element este determinată deoarece vitezele și accelerațiile tuturor punctelor sînt respectiv egale și paralele:

$$\bar{v}_A \# \bar{v}_B \# \bar{v}_C; \quad \bar{a}_A \# \bar{a}_B \# \bar{a}_C.$$

Spre deosebire de cazul elementului cinematic aflat în mișcare de translație rectilinie, vectorii viteză și accelerație ai aceluiași punct nu mai sînt în prelungire. Mărimea unghiului α, format între suporturile lor, determină caracterul mișcării. Astfel, dacă $\alpha<90°$ mișcarea este *accelerată* (viteza unghiulară $\overline{\omega_1}\neq\overline{\text{const.}}$, accelerația unghiulară $\overline{\varepsilon_1}\neq\overline{\text{const.}}$, cei doi vectori avînd același sens — fig. 7.2, *a*), dacă $\alpha=90°$ mișcarea este *uniformă* ($\overline{\omega_1}=\overline{\text{const.}}$, $\overline{\varepsilon_1}=\overline{0}$ — fig. 7.2, *b*) iar dacă $\alpha>90°$ mișcarea este *încetinită* ($\overline{\omega_1}\neq\overline{\text{const.}}$, $\overline{\varepsilon_1}\neq\overline{\text{const.}}$, cei doi vectori avînd sensuri contrare — fig. 7.2, *c*).

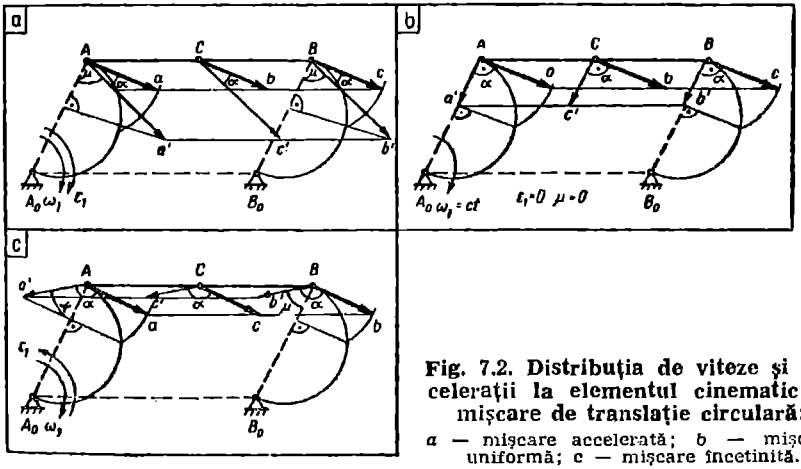


Fig. 7.2. Distribuția de viteze și accelerații la elementul cinematic în mișcare de translație circulară:
a — mișcare accelerată; *b* — mișcare uniformă; *c* — mișcare încetinită.

7.3. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

Se consideră un element cinematic monar A_0A legat la bază printr-o cuplă de rotaţie (fig. 7.3, *a*).

Vitezele unor puncte de pe element $A \in A_0A$, $M \in A_0A$ au expresiile

$$v_A = \omega_1 \cdot A_0A \perp A_0A;\ v_M = \omega_1 \cdot A_0M \perp A_0M;\ \bar{v}_A \parallel \bar{v}_M \qquad (7.1$$

Ele sînt reprezentate în figura 7.3, *a*, la scara vitezelor k_v, prin $\overline{(Aa)} = \frac{\bar{v}_A}{k_v}$, respectiv $\overline{(Mm)} = \frac{\bar{v}_M}{k_v}$ orientaţi în sensul vitezei unghiulare $\bar{\omega}_1$.

Vectorul $\overline{(Mm)} \parallel \overline{(Aa)}$ este cuprins între dreptele (A_0A) şi (A_0a), ultima reprezentînd locul *geometric* al vîrfurilor vectorilor viteza liniară al tuturor punctelor situate pe elementul cinematic A_0A. Rezultă că *vitezele sînt văzute din centrul de rotaţie* A_0 sub acelaşi unghi φ.

Presupunînd că elementul cinematic se roteşte cu viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ şi acceleraţia unghiulară $\bar{\varepsilon}_1$, ambele avînd acelaşi sens de rotaţie (cazul mişcării circulare *accelerate* — fig. 7.3, *a*), acceleraţiile unor puncte de pe element sînt date de relaţiile vectoriale:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^t;\ \bar{a}_M = \bar{a}_M^n + \bar{a}_M^t;\ \bar{a}_A \parallel \bar{a}_M, \qquad (7.$$

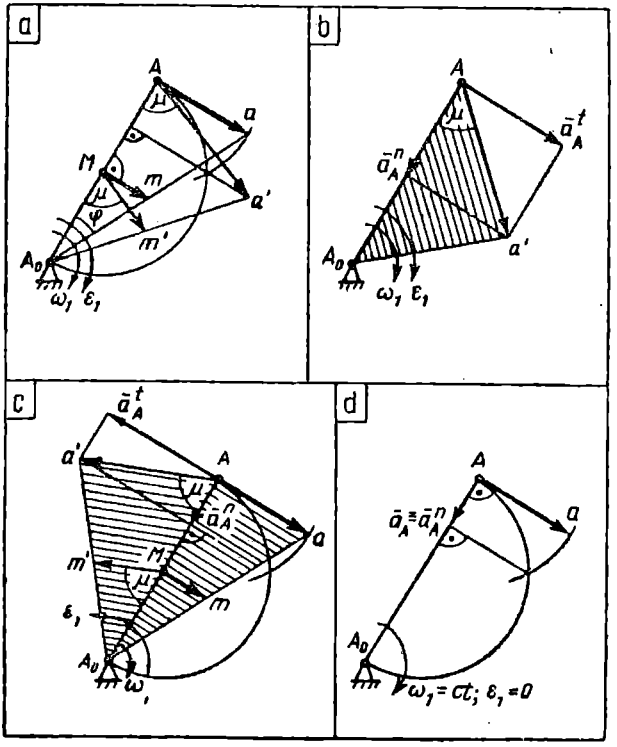


Fig. 7.3. Distribuţia de viteze şi acceleraţii la elementul cinematic în mişcare de rotaţie:

a — mişcare accelerată; *b* — acceleraţia butonului de manivelă *A*; *c* — mişcare încetinită; *d* — mişcare uniformă.

unde

$$a_A^n = \frac{v_A^2}{A_0A} = \omega_1^2 \cdot A_0A \,||\, \overrightarrow{AA_0};\quad a_M^n \frac{v_M^2}{A_0M} = \omega_1^2 \cdot A_0M \,||\, \overrightarrow{MA_0} \tag{7.3}$$

sînt *acceleraţiile normale (centripete)* dirijate către centrul de rotaţie A_0 (caracteristică notificată în scrierea ecuaţiilor vectoriale printr-o săgeată orizontală orientată spre acest centru) şi

$$a_A^t = \varepsilon_1 \cdot A_0A \perp A_0A;\quad a_M^t = \varepsilon_1 \cdot A_0M \perp A_0M \tag{7.4}$$

sînt *acceleraţiile tangenţiale*, perpendiculare pe element şi suprapuse cu vitezele liniare ale punctelor orientate în sensul dat de ε_1.

Unghiul format de suportul acceleraţiei totale cu suportul acceleraţiei normale (fig. 7.3, *b*) se determină cu relaţia:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a_A^t}{a_A^n} = \frac{a_M^t}{a_M^n} = \cdot = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}. \tag{7.5}$$

Prin urmare, *acceleraţiile totale ale tuturor punctelor de pe elementul cinematic sînt văzute din centrul de rotaţie* A_0 *sub acelaşi unghi* $(\widehat{AA_0a'})$. Vectorul $\overrightarrow{Mm'} \,||\, \overrightarrow{Aa'}$ este cuprins între dreptele A_0A şi A_0a', cea de-a doua reprezentînd *locul geometric* al vîrfurilor vectorilor acceleraţie totală al tuturor punctelor situate pe elementul cinematic A_0A (fig. 7.3, *a*).

Modulul acceleraţiei totale rezultă din aplicarea relaţiei

$$|\bar{a}_A| = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^t)^2} = A_0A\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2};\quad |\bar{a}_M| = A_0M\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2}. \tag{7.6}$$

Dacă viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ are sens contrar acceleraţiei unghiulare $\bar{\varepsilon}_1$, mişcarea de rotaţie este *încetinită* (fig. 7.3, c), vectorul acceleraţiei tangenţiale $\bar{a}_A^t$ fiind de *sens opus* vitezei liniare $\bar{v}_A$ a punctului.

Cînd viteza unghiulară este constantă $(\bar{\omega}_1 = \text{const.})$, acceleraţia unghiulară este nulă $(\bar{\varepsilon}_1 = \bar{0})$ — figura 7.3, *d* şi mişcarea de rotaţie este uniformă. În acest caz, acceleraţia totală a punctului se confundă cu acceleraţia sa normală $\bar{a}_A \equiv \bar{a}_A^n$.

Cînd articulaţia A_0 este *fixă*, vitezele şi acceleraţiile punctelor de pe element sînt *absolute*, iar cînd aceasta este *mobilă*, vectorii respectivi reprezintă vitezele şi acceleraţiile *relative* faţă de A_0 considerat fix.

Observaţie: Adoptînd scara acceleraţiilor $k_a = \frac{k_v^2}{k_l}$ (unde k_v este scara vitezelor şi k_l — scara lungimilor) se disting două metode grafice pentru construirea acceleraţiei normale a unui punct căruia i se cunoaşte viteza.

a) Cînd vectorul $(\overline{Aa}) = \frac{\bar{v}_A}{k_v} < (A_0A)$ — figura 7.4, *a* se procedează astfel:

— se trasează semicercul (C_{A_0A}) avînd centrul pe A_0A;

— din A considerat centru şi cu raza $(\overline{Aa})$ se duce arcul de cerc (C_{Aa}) care intersectează semicercul (C_{A_0A}) în punctul a_1;

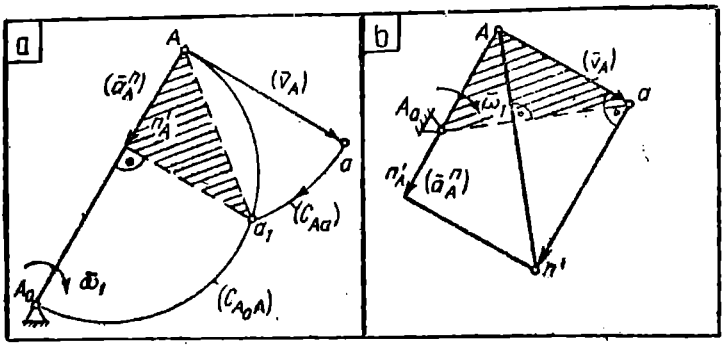


Fig. 7.4. Metode grafice pentru determinarea acceleraţiei normalei

a — cazul $\overline{(Aa)} < (A_0A)$; *b* — cazul $\overline{(Aa)} > (A_0A)$.

— din a_1 se coboară perpendiculara (a_1n_A) pe raza (A_0A). Vectorul $\overline{(An'_A)}$ reprezintă la scara k_a mărimea acceleraţiei normale

$$\bar{a}_A^n = k_a(\overline{An'_A}).$$

b) *Cînd vectorul* $\overline{(Aa)} = \frac{A}{k_v} > (A_0A)$, (fig. 7.4, b), modul de construcţie este următorul:

— se uneşte A_0 cu vîrful *a* al vectorului de viteză $\overline{(Aa)}$;

— din *A* se duce o perpendiculară pe (A_0a), iar din *a* o perpendiculară pe $\overline{(Aa)}$;

— la intersecţia celor două perpendiculare se găseşte punctul *n'*. Vectorul $\overline{(an')} = (\overline{An'_A})$ reprezintă la scara k_a acceleraţia normală

$$\bar{a}_A^n = k_a(\overline{An'_A}).$$

7.4. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIŞCARE PLANĂ GENERALĂ

Un element cinematic execută o mişcare plană generală (mişcare plană de rototranslaţie) atunci cînd traiectoriile diverselor puncte ale rigidului sînt conţinute în plane paralele. Pentru îndeplinirea acestei condiţii, este suficient ca trei puncte necoliniare ale rigidului să rămînă tot timpul mişcării într-un plan fix.

Se presupune un element cinematic *AB* aflat în mişcare plană de rototranslaţie care, în cazul considerat în figura 7.5, reprezintă biela unui mecanism patrulater A_0ABB_0.

Pentru determinarea distribuţiei de viteze şi acceleraţii din planul acestui element se aplică *relaţiile vectoriale ale lui Euler*. Astfel, pentru două puncte *A* şi *B* din planul bielei (articulaţiile bielei cu manivela şi balansierul), se scriu următoarele ecuaţii pentru viteze şi acceleraţii:

$$\underset{\perp BB_0}{\bar{v}_B} = \underset{\perp A_0A}{\bar{v}_A} + \underset{\perp AB}{\bar{v}_{BA}} \qquad (7.7)$$

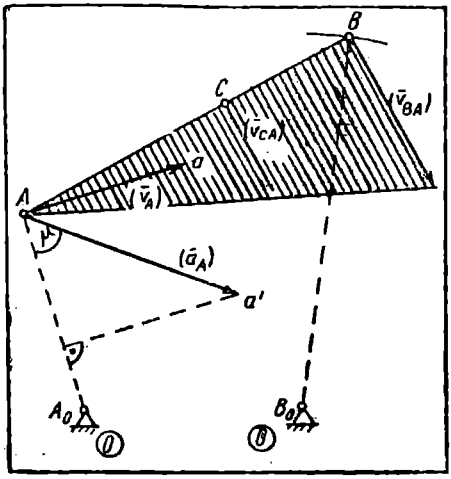


Fig. 7.5. Element cinematic legat prin cuple de rotație.

($\bar{v}_{BA}$ — viteza relativă de rotație a punctului B în raport cu A presupus fix, a cărei variație este triunghiulară):

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{a}_B &= \underbrace{\bar{a}_A^n}_{\parallel AA_0} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^n}_{\parallel BA} + \underbrace{\bar{a}_{BA}^t}_{\perp AB} \\ \bar{a}_B &= \underbrace{\bar{a}_B^n}_{\parallel BB_0} + \underbrace{\bar{a}_B^t}_{\perp B_0B} \end{aligned}} \qquad (7.8)$$

($\bar{a}_{BA}^n$ este accelerația relativă normală de rotație a punctului B în raport cu A presupus fix, $\bar{a}_{BA}^t$ — accelerația relativă tangențială a punctului B în raport cu A considerat fix, $\bar{a}_B^n$ — accelerația normală absolută a punctului B, $\bar{a}_B^t$ — accelerația tangențială absolută a punctului B).

Convențional, în relațiile (7.7) și (7.8), s-au sublinieat cu *două linii* vectorii complet cunoscuți (ca modul, direcție, sens) și cu *o singură linie* vectorii cunoscuți numai ca suport (direcție). Sub aceste sublinieri se specifică *direcțiile vectorilor respectivi*. Astfel, sînt complet cunoscuți vectorii $v_A=\omega_1 \cdot A_0A \perp A_0A$; $a_A=A_0A\sqrt{\omega_1^4+\varepsilon_1^2}$ (care face unghiul $\mu=\text{arctg}\frac{\varepsilon_1}{\omega_1^2}$ cu raza vectoare A_0A; pentru cazul cînd $\overline{\omega_1}=\overline{\text{const.}}$, se obțin relațiile: $a_A=\omega_1^2 A_0A \,||\, AA_0$ și $\mu=0$); $a_{BA}^n=\frac{v_{BA}^2}{AB}=\omega_2^2 \cdot AB \,||\, BA$; $a_B^n=\frac{v_B^2}{B_0B} \,||\, BB_0$ ($\overline{\omega_2}$ — viteza unghiulară a elementului AB).

Restul vectorilor din relațiile (7.7) și (7.8) sînt cunoscuți numai ca direcție. Aceste ecuații vectoriale se pot rezolva pe cale grafică, construind *planul vitezelor* și *planul accelerațiilor*.

7.5. REZOLVAREA GRAFICĂ A ECUAȚIILOR DE DISTRIBUȚIE A VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR ÎN MIȘCAREA PLANĂ DE ROTOTRANSLAȚIE. TEOREMA ASEMĂNĂRII

7.5.1. REZOLVAREA GRAFICĂ

Rezolvarea grafică a unei ecuații vectoriale se face aplicînd următorul algoritm de calcul:

— se alege în planul desenului (hîrtiei) o origine arbitrară (numită *pol*) a poligonului vectorilor ce urmează a se trasa;

— se construiesc vectorii situați în unul din membrii ecuației vectoriale, în ordinea scrierii lor, începînd din pol, *unul cu originea în vîrful celuilalt;*

— se construiesc, în același mod, vectorii situați în celălalt membru al ecuației, construcția grafică *începînd tot din pol.*

În acest fel se obține atît poligonul (planul) vitezelor cît și poligonul (planul) accelerațiilor, cu ajutorul cărora se determină distribuția de viteze și accelerații pe toate elementele mecanismului plan.

7.5.2. TEOREMA ASEMĂNĂRII

Pentru alte puncte aparținînd planului unui element cinematic, vitezele și accelerațiile se determină dacă se cunosc pozițiile vîrfurilor vectorilor viteză, respectiv accelerație ai altor două puncte de pe același element, cu ajutorul *teoremei asemănării,* potrivit căreia: *„figura formată în planul vitezelor relative sau în planul accelerațiilor relative de vîrfurile vectorilor punctelor aparținînd elementului este direct asemenea cu figura formată de punctele respective în planul mecanismului (denumită figura în mișcare)".*

În cazul planului vitezelor, cele două figuri asemenea au laturile perpendiculare (figura vitezelor relative este rotită față de figura în mișcare cu 90° în sensul vitezei unghiulare ω), iar în cazul planului accelerațiilor figura din acest plan este rotită cu unghiul $(\pi - \mu)$ în sensul accelerației unghiulare ε a elementului.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Cum sînt vitezele și accelerațiile diferitelor puncte situate pe un element cinematic aflat în mișcare de translație rectilinie?*
2. *Precizați ce deosebiri există între distribuțiile de viteze și accelerații a două elemente cinematice, primul fiind în mișcare de translație rectilinie, iar secundul în mișcare de translație circulară.*
3. *Ce corelații pot exista între suporturile vitezei liniare și accelerației tangențiale ale punctelor de pe elementele cinematice care descriu o mișcare de rotație?*
4. *Cum se construiește grafic accelerația normală a unui punct cunoscînd viteza lui și scara accelerațiilor* $k_a = \dfrac{k_v^2}{k_l}$ *?*

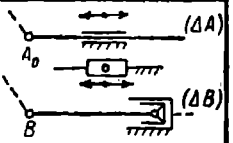
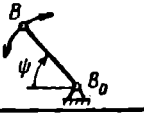
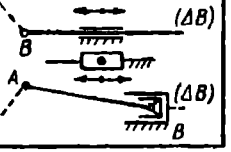
8

CINEMATICA GRAFOANALITICĂ A MECANISMELOR PLANE CU BARE

8.1. DENUMIRILE ŞI VARIANTELE CONSTRUCTIVE ALE ELEMENTELOR CINEMATICE

Mecanismele plane cu bare transmit mişcarea de la *elementul conducător* (sau elementele conducătoare) la *elementul condus* (sau elementele conduse) în mod indirect, folosind unul sau mai multe *elemente intermediare*. Fiind mecanisme plane, elementele cinematice componente sînt legate între ele numai prin cuple de clasa a V-a (de rotaţie sau de translaţie). Elementele cinematice au diverse denumiri şi forme constructive după *felul mişcării realizate* şi *tipul cuplelor utilizate* (tab. 8.1).

TABELUL 8.1

Categoria	*Denumirea*	*Felul mişcării realizate*	*Tipul cuplelor utilizate*	*Schema cinematică*
I Elemente conducătoare (motoare)	*1 Manivela*	*Rotaţie completă*	*Două cuple de rotaţie (una fixă, cealaltă mobilă)*	
	2 Glisiera sau pistonul	*Translaţie oscilantă*	*O cuplă de rotaţie şi o cuplă de translaţie (ambele mobile, ghidajul fiind fix)*	
II Elemente intermediare	*1 Biela*	*Mişcare plană de rototranslaţie oscilantă*	*Două cuple de rotaţie mobile*	
	2 Biela culisou	*Mişcare plană de rototranslaţie*	*O cuplă de rotaţie şi o cuplă de translaţie (ambele mobile)*	
III Elemente conduse	*1 Balansierul*	*Mişcare de rotaţie oscilantă*	*Două cuple de rotaţie (una fixă, cealaltă mobilă)*	
	2 Glisiera sau pistonul	*Translaţie oscilantă*	*O cuplă de rotaţie şi o cuplă de translaţie (ambele mobile, ghidajul fiind fix)*	

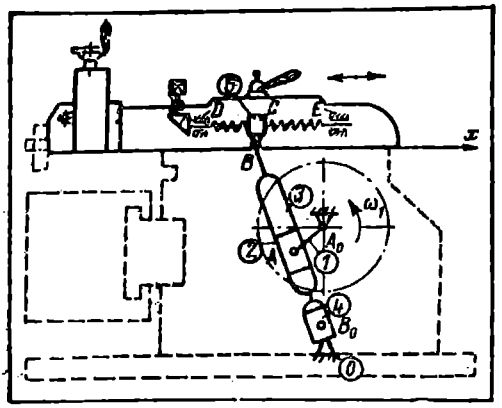


Fig. 8.1. Amplasarea mecanismu manivelă-culisă în construcția ra tezelor.

Mecanismele cu bare sînt foarte răspîndite în practică, ele constitui majoritatea mecanismelor plane utilizate în tehnică. Pentru exemplifica este reprezentat în figura 8.1 mecanismul manivelă-culisă (șeping) utiliz în construcția rabotezelor.

8.2. CINEMATICA GRAFOANALITICĂ A PRINCIPALELOR MECANISME MOTOR PLANE ARTICULATE DE CLASA A II-a/ORDINUL 2

8.2.1. MECANISMUL MOTOR PATRULATER 4R (RRRR)

Se consideră mecanismul-motor $4R(A_0ABB_0)$ (fig. 8.2, *a*) la care cunosc pozițiile articulațiilor fixe A_0, B_0, dimensiunile elementelor A AB, BB_0, poziția elementului conducător dată de unghiul φ_1 de rot al manivelei, și mărimea vitezei unghiulare de rotație a acestui elem ω_1=const. De asemenea, se cunoaște poziția unui punct arbitrar M ap ținînd planului bielei AB.

Studiul cinematic constă în determinarea distribuției de viteze accelerații pe întregul mecanism folosind metoda grafoanalitică.

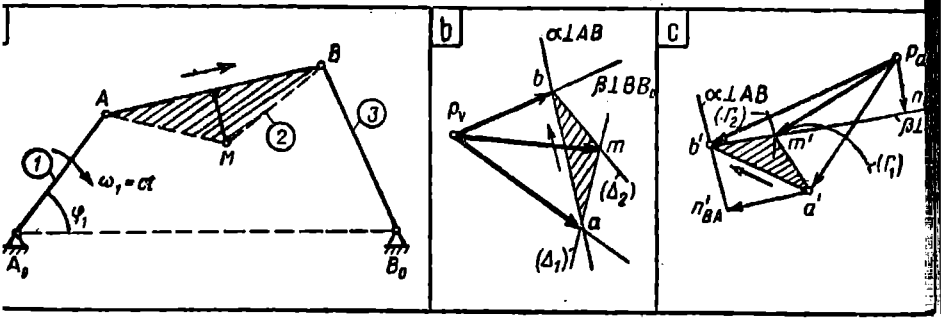


Fig. 8.2. Planele de viteze și accelerații la mecanismul patrulater 4R:
a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor; *c* — planul accelerațiilor.

Distribuția de viteze

1) $v_a = \omega_1 \cdot A_0A \perp A_0A$

2) $\underset{\perp BB_0}{\overline{v_B}} = \underset{\perp A_0B}{\overline{v_A}} + \underset{\perp AB}{\overline{v_{BA}}}$

$\overline{(p_v b)} = \overline{(p_v a)} + \overline{(ab)}$ (în fig. 8.2, *b*)

3) $\overline{v}_M$ — prin asemănare

$(\Delta)ABM \perp (\Delta)amb$

$m \equiv [(\Delta_1)_a \perp AM] \cap [(\Delta_2)_b \perp BM]$

4) $\omega_2 = v_{BA}/AB$ ↶: $\omega_3 = v_B/BB_0$ ↷

Distribuția de accelerații

1) $a_A \equiv \overset{n}{A} = \omega_1^2 \cdot A_0A \| AA_0$

2)
$$\begin{cases} \overrightarrow{a_B} = \underset{\| AA_0}{\overrightarrow{a_A^n}} + \underset{\| BA}{\overrightarrow{a_{BA}^n}} + \underset{\perp BA}{\overrightarrow{a_{BA}^t}} \\ \overrightarrow{a_B} = \underset{\| BB_0}{\overrightarrow{a_B^n}} + \underset{\perp BB_0}{\overrightarrow{b_B^t}} \end{cases}$$

$\overline{(p_a n'_B)} + \overline{(n'_B b')} = \overline{(p_a a')} + \overline{(a' n_{BA})} + \overline{(n'_{BA} b')}$

(în fig. 8.2, *c*) unde

$a_{BA}^n = v_{BA}^2/AB = k_v^2 (ab)^2/AB$

$a_B^n = v_B^2/BB_0 = k_v^2 (p_v b)^2/BB_0$

3) $\overline{a}_M$ = prin asemănare:

$(\Delta)AMB \sim (\Delta)a'm'b'$

$$\frac{\overline{(a'm')}}{AM} = \frac{\overline{(a'b')}}{AB} = \frac{\overline{(m'b')}}{MB} \Rightarrow \overline{(a'm')};\ \overline{(m'b')};$$

$m' = (\Gamma_1)_{a'}^{(a'm')} \cap (\Gamma_2)_{b'}^{(b'm')}$

4) $\overline{\varepsilon_1} = \overline{0}$ (deoarece $\overline{\omega_1} = \overline{\text{const.}}$);

$\varepsilon_2 = a_{BA}^t/AB$ ↶); $\varepsilon_3 = a_B^t/BB_0$ ↶).

Planul vitezelor, construit la scara k_v, este redat în figura 8,2, *b*, iar planul accelerațiilor, trasat la scara $k_a = k_v^2/k_l$, este reprezentat în figura 8.2, *c*.

Construcția grafică a planului vitezelor (fig. 8.2, *b*) se face în următoarea succesiune:

— Se alege* scara vitezelor $k_v \left[\frac{\text{m s}^{-1}}{\text{mm}}\right]$, se determină și se trasează vectorul $\overline{(p_v a)} = \frac{\overline{v_A}}{k_v} \perp A_0A$ care reprezintă, pe desen, viteza punctului A (p_v — polul vitezelor).

— Din extremitatea a a vectorului $\overline{(p_v a)}$ se duce direcția $(a\alpha) \perp AB$ (direcția vitezei relative $\overline{v_{BA}}$). În acest fel a fost construit grafic membrul drept al ecuației vectoriale (2).

— Din polul vitezelor p_v se duce direcția $(p_v\beta) \perp BB_0$ care reprezintă suportul vitezei $\overline{v_B}$. A fost construit astfel și membrul stîng al ecuației vectoriale (2). La intersecția direcțiilor $(a\alpha)$ și $(p_v\beta)$ se obține punctul b (vîrful vectorului vitezei $\overline{v_B}$). Rezultă $\overline{v_B} = k_v \overline{(p_v b)}$.

— Viteza unui punct oarecare M aparținînd planului elementului AB se obține aplicînd teorema asemănării. Întrucît în planul mecanismului și în planul vitezelor celor două figuri asemenea (triunghiurile ABM și abm)

* În rezolvarea problemelor se procedează invers și anume se desenează vectorul $\overline{(p_v a)} = 30$—40 mm, după care se stabilește scara vitezelor $k_v = v_A/(p_v a)$.

au laturile perpendiculare, punctul m se obține la intersecția direcțiilor $(\Delta_1) \perp \overline{AM}$, dusă din a, și, respectiv, $(\Delta_2) \perp BM$, dusă din b. Rezultă $\bar{v}_M = k_v(\overline{p_v m})$.

Ca regulă generală practică, se reține că, *la figurile direct asemenea vîrfurile omoloage* (de exemplu M și m) *apar în aceeași ordine pentru un sens unic de parcurgere a conturului celor două figuri*. Astfel, în cazul analizat, parcurgînd elementul (AB) de la A către B, punctul M se vede în dreapta. Aceeași concordanță va trebui să existe și în planul vitezelor, adică punctul m trebuie să se găsească în dreapta vectorului $\overline{(ab)}$ la parcurgerea acestuia de la a către b.

Mărimea vitezei unghiulare $\bar{\omega}_2$ a elementului AB se deduce din relația $\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB} = \frac{k_v(ab)}{AB}$, iar sensul ei se obține transpunînd vectorul $\overline{(ab)}$ din planul vitezelor, în articulația B, și observînd sensul rotației pe care elementul AB îl capătă în ipoteza că articulația A este fixă. În cazul analizat, acest sens de rotație este trigonometric și el se notează, în aplicație, în dreptul relației respective.

În mod asemănător rezultă și mărimea vitezei unghiulare $\omega_3 = \frac{v_B}{BB_0}$ a elementului B_0B, sensul ei de rotație fiind cel orar.

Planul accelerațiilor se trasează în următoarea succesiune (fig. 8.2, c):

— Se alege scara accelerațiilor $k_a \left[\frac{m s^{-2}}{mm}\right]$ (de regulă $k_a = \frac{k_v^2}{k_l}$ pentru a se obține componentele normale ale accelerațiilor în mod direct făcînd rapoartele segmentelor corespunzătoare din planul de viteze și planul mecanismului). În continuare se determină și se construiește vectorul $\overline{(p_a a')} = \frac{\bar{a}_A}{k_a} \| AA_0$ (care reprezintă accelerația totală a punctului A), iar în extremitatea a' se transpune vectorul $\overline{(a'\ n'_{BA})} = \frac{\bar{a}^n_{BA}}{k_a} = \frac{\overline{(ab)}}{(AB)} \| BA$ (care reprezintă accelerația relativă normală $\bar{a}^n_{BA}$). Din n'_{BA} se duce direcția $(n'_{BA}\alpha) \perp AB$ ce reprezintă primul loc geometric al vîrfului vectorului

Mecanismul patrulater –

Date constructive și cinematice								Scări	
A_0A	AB	B_0B	AM	BM	A_0B_0	φ_1^0	$\omega_1 = \text{ct.}$	k_l	k_v
m	m	m	m	m	m	—	rads^{-1}	$\frac{\text{m}}{\text{mm}}$	$\frac{\text{m/s}}{\text{mm}}$
0,2	0,3	0,25	0,165	0,165	0,5	55°	42,3	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{2}$

accelerației punctului B. În acest fel a fost construit grafic primul membru al ecuației vectoriale (2).

În polul accelerațiilor p_a se construiește vectorul $\overrightarrow{(p_a n'_B)} = \frac{\bar{a}^n_B}{k_a} \parallel BB_0$ (care reprezintă accelerația normală a punctului B), iar în n'_B se trasează direcția $(n'_B\beta) \perp BB_0$, ce reprezintă al doilea loc geometric al vîrfului vectorului accelerației punctului B. Prin această reprezentare s-a construit grafic și al doilea membru al ecuației vectoriale (2). Rezultă $b' \equiv (n'_{BA}\alpha) \cap \cap (n'_B\beta)$ și deci $\bar{a}_B = k_a\overrightarrow{(p_a b')}$; $\bar{a}^t_{BA} = k_a\overrightarrow{(n'_{BA} b')}$, $\bar{a}_B = k_a\overrightarrow{(n'_B b')}$.

Accelerația punctului M se obține cu ajutorul teoremei asemănării, vîrful m' al vectorului accelerației $\overrightarrow{(p_a m')}$ rezultînd la intersecția arcului de cerc (Γ_1) de rază $(a'm')$ și centru a', cu arcul de cerc (Γ_2) de rază $(b'm')$ și centru b'.

Valorile razelor $(a'm')$ și $(b'm')$ au fost determinate din rapoartele de proporționalitate ale laturilor triunghiurilor direct asemenea ABM și $a'b'm'$.

Verificarea directei asemănări între cele două figuri se face prin constatarea că parcurgînd latura $(a'n')$ de la a' către b', punctul m' trebuie să se vadă de aceeași parte (în cazul de față în dreapta).

Mărimea accelerației unghiulare $\bar{\varepsilon}_2$ a elementului AB se deduce din relația $\varepsilon_2 = \frac{a^t_{BA}}{AB} = \frac{k_a(n'_{BA}b')}{AB}$ iar sensul ei de rotație se obține transpunînd vectorul $\overrightarrow{(n'_{BA}b')}$ din planul accelerațiilor în articulația B și observînd sensul rotației pe care elementul (AB) îl capătă presupunînd articulația A ca fiind fixă (în cazul analizat $\bar{\varepsilon}_2$ are sens de rotație trigonometric).

În mod analog rezultă accelerația unghiulară $\varepsilon_2 = \frac{a^t_B}{BB_0}$ cu sensul de rotație trigonometric. Analizînd rezultatele se observă că, la momentul considerat, biela are o mișcare plană de rototranslație accelerată ($\bar{\omega}_2$ și $\bar{\varepsilon}_2$ au același sens de rotație), iar balansierul are o mișcare circulară încetinită ($\bar{\omega}_3$ și $\bar{\varepsilon}_3$ au sensuri contrare).

Exemplul 8.1. Să se determine distribuția de viteze și accelerații la mecanismul-motor plan patrulater $4R$ din figura 8.2, *a* cunoscînd datele din tabelul 8.2.

Rezolvare. Rezultatele obținute sînt centralizate în același tabel.

TABELUL 8.2

numerice (date și calculate)

Valori calculate pentru trasarea planelor							Rezultate							
n_A	a_A	$k_a = \frac{k_v^2}{k_l}$	$\overrightarrow{(p_a a)}$	$\overrightarrow{(p_a a')}$	$\overrightarrow{(a'n'_{BA})}$	$\overrightarrow{(p_a n'_B)}$	v_B	a_B	v_M	a_M	ω_2	ω_3	ε_2	ε_3
ms^{-1}	ms^{-2}	$\frac{ms^{-2}}{mm}$	mm	mm	mm	mm	ms^{-1}	ms^{-2}	ms^{-1}	ms^{-2}	$rad\,s^{-1}$	$rad\,s^{-1}$	$rad\,s^{-2}$	$rad\,s^{-2}$
19,5	550	25	21	22	10,7	8,1	7,5	700	10	475	31,6	30	750	2 750

Se consideră un mecanism-motor plan manivelă-piston $R(RRT)$ dezaxat (fig. 8.3, *a*), la care se cunosc pozițiile articulației fixe A_0, a ghidajului ΔB și a elementului conducător (dată de unghiul φ_1), precum și mărimea vitezei unghiulare de rotație a acestui element $\omega_1=\text{const}$. Se mai cunoaște poziția unui punct arbitrar M aparținînd planului bielei AB.

8.2.2.1. Metoda ecuațiilor cu vectori normali

Distribuția de viteze

1) $v_A=\omega_1 A_0A\perp A_0A$

2) $\underset{\|\Delta B}{\overline{v_B}}=\underset{\perp A_0A}{\overline{v_A}}+\underset{\perp AB}{\overline{v_{BA}}}$

3) $\overline{v_M}$ — prin asemănare

$(\Delta)AMB\perp(\Delta)amb$

$m\equiv[(\Delta_1)_a\perp AM]\cap[(\Delta_2)_b\perp BM]$

4) $\omega_2=v_{BA}/AB$ ↻; $\omega_3=0$ (elementul *3* se află în mișcare de translație).

Distribuția de accelerații

1) $a_A\equiv a_A^n=\omega_1^2 A_0A\|AA_0$

2) $\underset{\|\Delta_B}{\overline{a_B}}=\underset{\|AA_0}{\overline{a_A^n}}+\underset{\|BA}{\overline{a_{BA}^n}}+\underset{\perp AB}{\overline{a_{BA}^t}}$

unde $a_{BA}^n=v_{BA}^2/AB=k_v^2(ab)^2/AB$

3) $\overline{a_M}$ — prin asemănare:

$(\Delta)AMB\sim(\Delta)a'm'b'$; $\dfrac{(a'm')}{AM}=\dfrac{(a'b')}{AB}=\dfrac{(b'm')}{BM}\Rightarrow(a'm')$; $(b'm')$

$m'\equiv(\Gamma_1)_{a'}^{(m'a')}\cap(\Gamma_2)_{b'}^{(b'm')}$

4) $\overline{\varepsilon_1}=\overline{0}$ (deoarece $\overline{\omega_1}=\text{const.}$);

$\varepsilon_2=a_{BA}^t/AB$ ↻; $\varepsilon_3=0$ (elementul *3* se află în mișcare de translație).

Planul vitezelor, trasat la scara k_l, și planul accelerațiilor, construit la scara $k_a=k_v^2/k_l$, sînt redate în figurile 8.3, *b*, respectiv 8.3, *c*.

Exemplul 8.2. Să se determine distribuția de viteze și accelerații la mecanismul-motor plan manivelă-piston dezaxat $R(RRT)$ (fig. 8.3, *a*) cunoscînd datele înscrise în tabelul 8.3.

Mecanismul manivelă piston –

Date constructive și cinematice							Scări		Valori calculate pentru	
A_0A	AB	A_0C	AM	BM	φ°	$\omega_1=\text{ct}$	k_l	k_v	v_A	φ_1
m	m	m	m	m	—	rad s^{-1}	$\dfrac{\text{m}}{\text{mm}}$	$\dfrac{\text{ms}^{-1}}{\text{mm}}$	ms^{-1}	m
0,2	0,45	0,01	0,24	0,24	55	52,3	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{1}{2}$	~10,5	

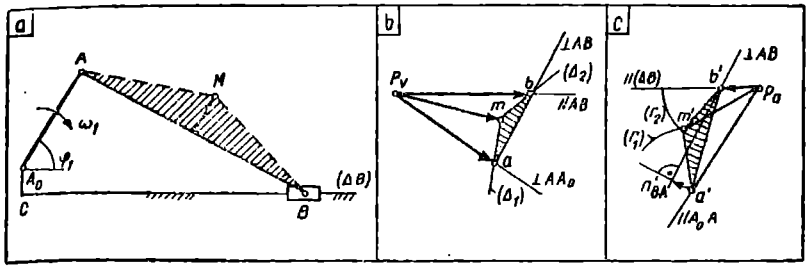


Fig. 8.3. Planele de viteze şi acceleraţii la mecanismul manivelă-piston dezaxat R(RRT):

a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor; *c* — planul acceleraţiilor.

Rezolvare. Efectuînd calculele grafice conform metodologiei prezentate se obţin rezultatele indicate la acelaşi tabel.

8.2.2.2. Metoda ecuaţiilor cu vectori rabătuţi

În studiul cinetostatic al mecanismelor este mai comod să se lucreze cu *metoda ecuaţiilor cu vectori rabătuţi*, care constă în trasarea *planului vitezelor rotite cu 90°*, respectiv a *planului acceleraţiilor rotite cu 180°*. Această trasare se poate face fie separat de planul mecanismului, fie *direct pe planul mecanismului*, ultima modalitate fiind preferată.

Distribuţia de viteze

1) $\overline{|v_A|} \quad -\omega_1 \cdot A_0A \parallel A_0A$ (rotire cu 90°)

2) $\underset{\perp \Delta_B}{\overline{v_B}} = \underset{\parallel A_0A}{\overline{v_A}} + \underset{\parallel AB}{\overline{v_{BA}}}$

Distribuţia de acceleraţii

1) $\overleftarrow{|a_A|} \equiv \overleftarrow{a_A^n} = \omega_1^2 A_0A \parallel A_0A$

2) $\underset{\parallel AB}{\overleftarrow{a_B}} = \underset{\parallel AA_0}{\overleftarrow{a_A^n}} + \underset{\parallel BA}{\overline{a_{AB}^n}} + \underset{\perp AB}{\overline{a_{BA}^t}}$

TABELUL 8.3

Numerice (date şi calculate)

				Rezultate					
$k_a = \frac{k_v^2}{k_l}$	$\overline{(p_v a)}$	$\overline{(p_a a')}$	$\overline{(a'n'BA)}$	v_B	a_B	ω_2		v_M	a_M
$\frac{ms^{-2}}{mm}$	mm	mm	mm	ms^{-1}	ms^{-2}	rad s^{-1}	rad s^{-1}	ms^{-1}	ms^{-2}
25	21	22	4,05	11,8	187,5	15,55	1 055,5	10	440

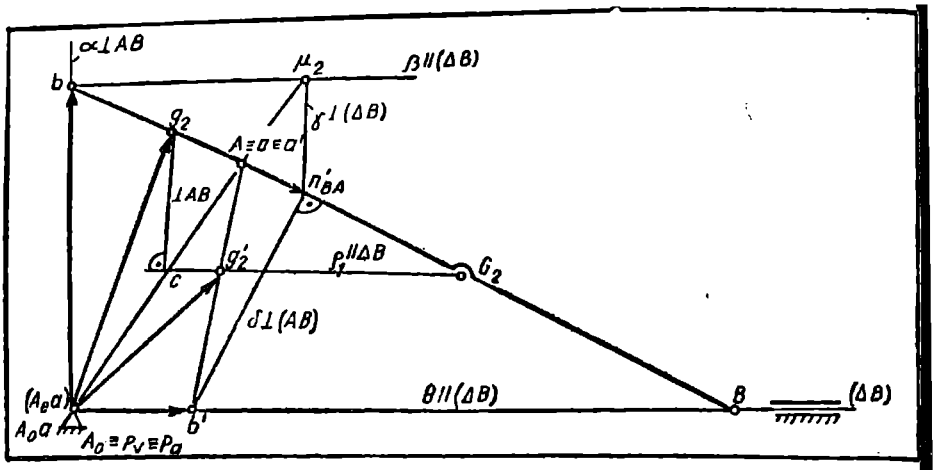


Fig. 8.4. Construcții grafice pentru determinarea planelor de viteze și accelerații cu vectori rabătuți (rotiți).

Trasarea planului vitezelor rotite cu 90° (fig. 8.4) se face în următoarea ordine:

— Se alege polul vitezelor în articulație fixă A_0 și se reprezintă viteza punctului a prin vectorul $\overrightarrow{(p_v a)} \equiv \overrightarrow{(A_0 A)}$. Rezultă scara vitezelor $k_v = \omega_1 k_l$ (această relație se obține din egalitatea $\frac{v_A}{k'_v} = \frac{A_0 A}{k_l}$ în care se înlocuiește $v_A = \omega_1 A_0 A$).

— Se duce direcția $(A_0\alpha) \perp (\Delta B)$ pînă intersectează prelungirea bielei (AB) în punctul b. Rezultă viteza rotită cu 90° a punctului B: $\overrightarrow{v_B} = k'_v \overrightarrow{(p_v b)}$.

— Unind a cu b se deduce distribuția de viteze rotite pe biela (AB) cu ajutorul, căreia se determină viteza oricărui punct aparținînd planului bielei.

Trasarea planului accelerațiilor rotite cu 180° (fig. 8.4) se face în succesiunea care urmează:

— Se alege polul accelerațiilor în articulația fixă A_0 și se reprezintă accelerația punctului A prin vectorul $\overrightarrow{(p_a a')} \equiv \overrightarrow{(A_0 A)}$. Rezultă scara accelerațiilor $k'_a = \omega_1^2 k_l$ (această relație se obține din egalitatea $\frac{a^n_A}{k'_a} = \frac{A_0 A}{k_l}$ în care se înlocuiește $a^n_A = \omega_1^2 \cdot A_0 A$).

— Se determină punctul u_2 la intersecția direcției $(A_0 A)$ cu dreapta (b) paralelă cu (ΔB).

— Din u_2 se duce direcția (u_2) perpendiculară pe (ΔB) pînă intersectează biela (AB) în punctul n'_{BA}. Rezultă astfel accelerația rotită $\overrightarrow{a^n_{BA}} = k'_a \cdot \overrightarrow{(a' n'_{BA})}$.

Mecanismul transportor –

Date constructive și cinematice								Scări adoptate		
A_0A	B_0B	AB	BC	a	b	φ_1^0	$\omega_1 = ct$	k_l	k_v	$k_{}$
m	m	m	m	m	m	—	rad s^{-1}	$\frac{m}{mm}$	$\frac{ms^{-1}}{mm}$	$\frac{ms}{m}$
0,2	0,2	0,2	1,2	0,05	0,06	63°	10	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{0,}$

Astfel, viteza centrului de greutate (G_2) al bielei se obține fie prin asemănare, fie ducînd din G_2 direcția (G_2p_1) paralelă la (ΔB) pînă intersectează ($\overrightarrow{p_v a}$) în punctul c, de unde se ridică o perpendiculară pe (ΔB) pînă intersectează vectorul ($\overrightarrow{Ab}$) în punctul g_2. Rezultă $\overrightarrow{v_{G_2}} = k' (p_v g_2)$.

— Din n'_{AB} se trasează direcția ($n'_{BA}\delta$) perpendiculară pe (AB) obținîndu-se punctul b' la intersecția cu direcția $\theta \| \Delta B$ și implicit accelerația rotită a punctului B: $\overleftarrow{a_B} = k'_a (\overrightarrow{p_a b'})$.

— Unind a' cu b' se deduce distribuția de accelerații rotite pe biela (AB) care poate fi folosită pentru determinarea accelerației oricărui punct aparținînd planului bielei. De exemplu, accelerația rotită a centrului de greutate G_2 a bielei se obține fie prin asemănare, fie ducînd din G_2 direcția (G_2p_1) paralelă la (ΔB) pînă intersectează ($a'b'$) în g'_2. Rezultă $\overleftarrow{a_{G_2}} = k'_a (\overrightarrow{p_a g'_2})$.

8.3. DETERMINAREA DISTRIBUȚIEI DE VITEZE ȘI ACCELERAȚII LA MECANISMELE-MOTOR PLANE ARTICULATE DE CLASA A II-a/ORDINUL 2

Pe baza modalității de determinare a distribuțiilor de viteze și accelerații prezentată anterior se analizează cinematic *orice mecanism-motor plan cu bare articulate de clasa a II-a/ordinul 2*. Algoritmul de calcul cuprinde:

— alcătuirea schemei cinematice;

— verificarea familiei și a gradului de mobilitate al mecanismului;

— alcătuirea schemei structurale și stabilirea clasei și ordinului mecanismului (pentru a se constata dacă mecanismul este de clasa a II-a/ordinul 2);

— scrierea ecuațiilor vectoriale care dau distribuția de viteze și accelerații;

— construirea planelor vitezelor și accelerațiilor și determinarea valorilor numerice ale vitezelor (liniare, unghiulare) și accelerațiilor (liniare, unghiulare).

Exemplul 8.4. Să se determine distribuția de viteze și accelerații în mecanismul transportor din figura 8.5, *a*. Se cunosc lungimile elementelor $A_0A = B_0B = AB = 0{,}2$ m, $BC = 1{,}2$ m, pozițiile articulațiilor fixe, ghidajului și manivelei $a = 0{,}05$ m, $b = 0{,}05$ m; $\varphi_1 = 63°$, precum și viteza unghiulară a manivelei ($\omega_1 = 10$ rad s^{-1}).

Rezolvare. Pe baza rezolvării ecuațiilor vectoriale se obțin datele centralizate în tabelul 8.4.

TABELUL 8.4

umerice (date și calculate)

Valori calculate pentru trasarea planelor				Rezultate			
v_A	$\overrightarrow{(p_v a)}$	a_A	$\overrightarrow{(p_a a')}$	v_B	v_C	a_B	a_C
ms^{-1}	mm	ms^{-2}	mm	ms^{-1}	ms^{-1}	ms^{-2}	ms^{-2}
2	16	20	16	2,5	2,51	33,7	7

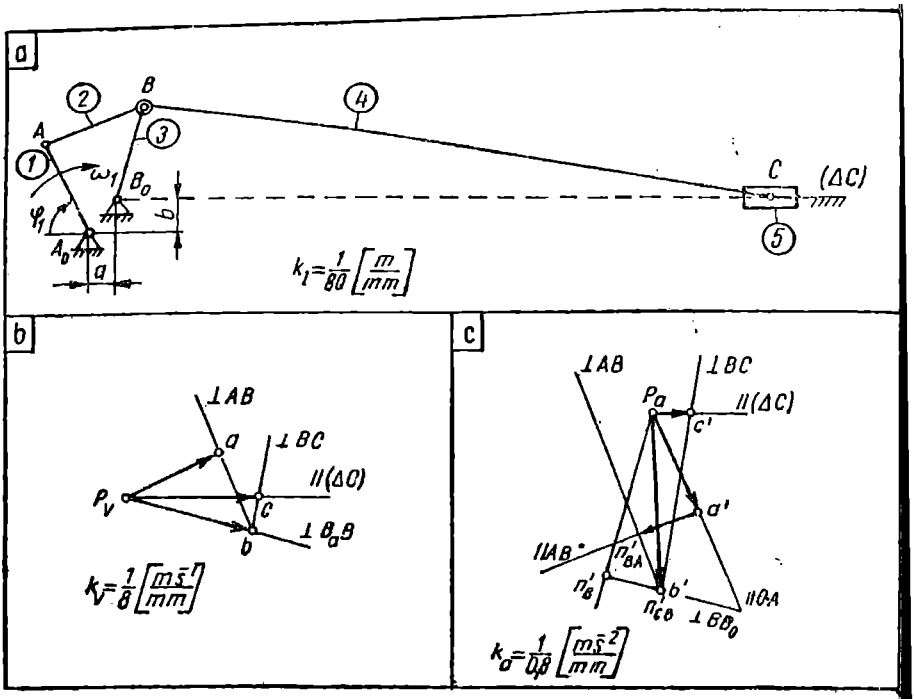


Fig. 8.5. Mecanismul transportor:
a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor; *c* — planul acceleraţiilor.

Determinarea vitezelor

1) $v_A = \omega_1 A_0 A \perp A_0 A$

2) $\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{BA}}$ ($\overline{v_B} \perp BB_0$; $\overline{v_A} \perp A_0 A$; $\overline{v_{BA}} \perp AB$)

3) $\overline{v_C} = \overline{v_B} + \overline{v_{CB}}$ ($\overline{v_C} \parallel \Delta C$; $\overline{v_B} \perp BB_0$; $\overline{v_{CB}} \perp BC$)

4) $\omega_2 = \frac{v_{BA}}{AB}$; $\omega_3 = \frac{v_B}{B_0 B}$; $\omega_4 = \frac{v_{CB}}{BC}$;

$\omega_5 = 0$.

Determinarea acceleraţiilor

1) $a_A^n = \omega_1^2 A_0 A \parallel AA_0$

2) $\begin{cases} \overline{a}_B = \overline{a}_A^n + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^t \\ \overline{a}_B = \overline{a}_B^n + \overline{a}_B^t \end{cases}$ ($\overline{a}_A^n \parallel AA_0$; $\overline{a}_{BA}^n \parallel BA$; $\overline{a}_{BA}^t \perp AB$; $\overline{a}_B^n \parallel BB_0$; $\overline{a}_B^t \perp BB_0$)

3) $\overline{a}_C = \overline{a}_B + \overline{a}_{CB}^n + \overline{a}_{CB}^t$ ($\overline{a}_C \parallel \Delta C$; $\overline{a}_{CB}^n \parallel CB$; $\overline{a}_{CB}^t \perp BC$)

4) $\varepsilon_2 = \frac{a_{BA}^t}{AB}$; $\varepsilon_3 = \frac{a_B^t}{B_0 B}$; $\varepsilon_4 = \frac{a_{CB}^t}{BC}$;

$\varepsilon_5 = 0$

VERIFICAREA CUNOŞTINŢELOR

1. *Enumeraţi denumirile elementelor cinematice conducătoare, intermediare şi conduse care pot fi întîlnite în componenţa mecanismelor plane cu bare articulate.*
2. *Să se determine distribuţia de viteze şi acceleraţii la mecanismul manivelă-piston pentru motoarele în V (fig. 8.6), cunoscînd* $\omega_1 = 167{,}4$ *rad* s^{-1}, $A_0A = 0{,}07$ *m*, $AB = 0{,}28$ *m*, $AC = 0{,}06$ *m*, $\widehat{A} = 45°$, $CD = 0{,}22$ *m*, $AG_2 = 0{,}09$ *m*, $CG_4 = 0{,}11$ *m*.

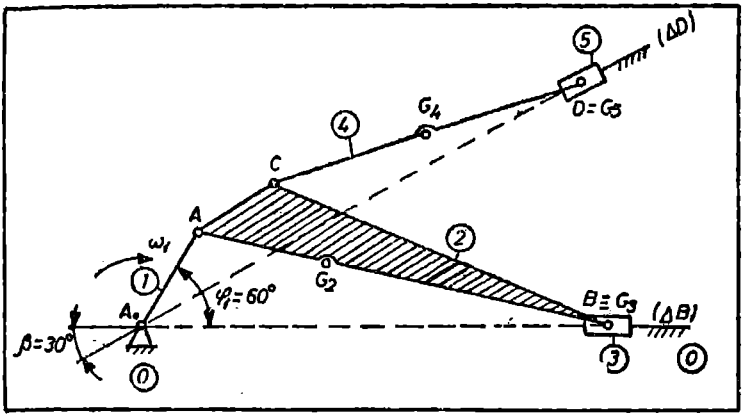


Fig. 8.6. Mecanismul manivelă-piston al motorului în V.

9

CINEMATICA GRAFOANALITICĂ A MECANISMELOR CU CAME

9.1. DENUMIRILE ŞI VARIANTELE CONSTRUCTIVE ALE ELEMENTELOR CINEMATICE

Mecanismele cu came fac parte din categoria mecanismelor cu cuple *superioare*. Ele sînt constituite dintr-un element *profilat* numit *camă*, de regulă element conducător, care transmite prin contact direct (cuplă de clasa a IV-a) elementului condus, numit *tachet*, o mişcare a cărei lege este determinată de profilul camei. În general, mecanismele cu came pot realiza *orice lege de mişcare* pentru elementul condus, deoarece profilul camei poate avea forme extrem de variate. Aceste mecanisme sînt întîlnite în toate domeniile industriale avînd un rol foarte important în construcţia maşinilor automate şi a motoarelor. Pentru exemplificare, se prezintă schema constructivă a unui mecanism cu camă utilizat la motoarele cu ardere internă (fig. 9.1).

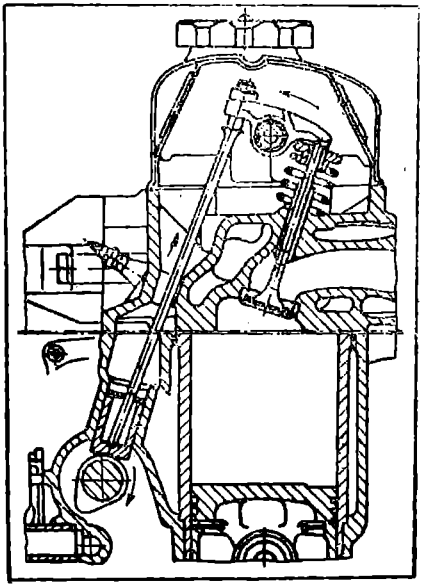


Fig. 9.1. Schema constructivă a mecanismelor cu came utilizate la motoarele cu ardere internă.

Mecanismele cu came se clasifică pe baza cunoașterii prealabile a caracteristicilor *constructive* și *cinematice ale camelor* (clasificare redată în tabelul 9.1) și, respectiv, ale *tacheților* (clasificare prezentată în tabelul 9.2).

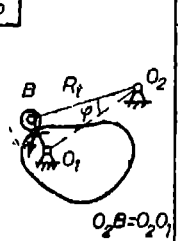
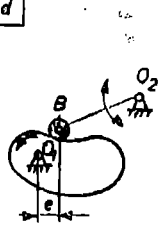
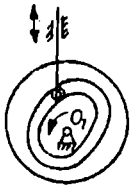
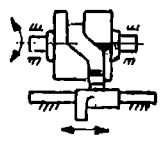
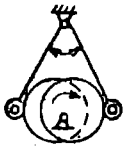
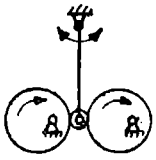
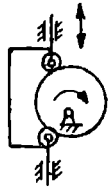
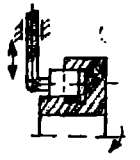
TABELUL 9.1

Forma curbei de profil	a Plană	b Plană	c Spațială cilindrică	d Spațială conică
Dispunerea profilului	e Exterioară	f Exterioară	g Interioară	h Interioară
Ecuația curbei deplasării $s = s(\varphi)$	i Camă cu profil liniar	j Camă cu profil parabolic	k Camă cu profil cosinusoidal	l Camă cu profil sinusoidal
Fazele comandate de camă (R-ridicare P-pauză C-coborîre)	m Camă de tip RPCP	n Camă de tip RPC	o Camă de tip RCP	p Camă de tip R
Numărul de curse ale tacheților la o rotație completă a camei	q Camă simplă	r Camă dublă	s Camă triplă	ș Camă cvadruplă
Realizarea constructivă a camei	t Camă completă	ț Camă completă	u Camă compusă	v Camă secționată
Mișcarea camei	w Camă de rotație	x Camă de translație	y Camă oscilantă	z Camă fină

TABELUL 9.2

Forma constructivă a suprafeței de contact	a Tachet cu vîrf	b Tachet cu rolă	c Tachet cu disc plan	d Tachet cu disc c
Mișcarea tachetului	e Mișcare de translație rectilinie alternativă	f Mișcare oscilantă	g Mișcare plan paralelă	

TABELUL 9.3

Direcția deplasării tachetului față de centrul camei				
	a	b	c	d
				
	Mecanism cu tachet axial translant	Mecanism cu tachet axial oscilant	Mecanism cu tachet excentric translant	Mecanism cu tachet excentric oscilant
Modul de închidere a cuplei cinematice	e	f	g	h
				
	Închidere prin forța dezvoltată de un arc	Închidere prin forța dezvoltată de un arc	Închidere cinematică camă canelată	Închidere cinematică camă spațială canelată
	i	j	k	l
				
	Închidere cinematică prin came duble	Închidere cinematică prin came duble	Închidere cinematică prin tachet dublu	Închidere cinematică prin canal dublu și tachet cu două role

Pe baza acestor date, mecanismele cu came pot fi clasificate după mai multe criterii (tab. 9.3).

9.2. ANALIZA CINEMATICĂ GRAFOANALITICĂ A MECANISMELOR CU CAME

Analiza cinematică are ca scop determinarea *deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor tachetului* pentru diferite poziții ale camei în timpul ciclului cinematic, cunoscînd tipul mecanismului, dimensiunile elementelor și profilul camei. Pe această bază se obțin legile de mișcare ale tachetului care se folosesc pentru trasarea profilului camei în raport cu cerințele procesului tehnologic. Una din metodele pentru efectuarea grafoanalitică a analizei cinematice a mecanismelor cu came este *metoda diagramelor cinematice.*

Metoda necesită parcurgerea a două etape de aplicare: *trasarea curbei de deplasare a tachetului în funcție de deplasarea camei* (pornind de la profilul cunoscut al camei) și *determinarea diagramelor vitezelor reduse și a accelerațiilor reduse ale tachetului în funcție de deplasarea camei.*

Trasarea curbei deplasării tachetului se bazează pe *principiul inversiunii mișcării (Willis).* În acest scop, se imprimă întregului mecanism (inclusiv elementului-bază) o mișcare de sens contrar cu viteza camei ($-\omega_1$ sau $-v_1$). Drept consecință, cama devine fixă, iar tachetul execută o mișcare în plus, putîndu-i-se măsura deplasările și deci trasa grafic curba deplasărilor punctului său de contact A_2 în funcție de deplasarea camei. Se exemplifică aplicarea principiului inversiunii mișcării la camele frecvent întîlnite în tehnică.

Mecanismele cu came de rotație (fig. 9.2) pot avea:

Tachet translant axial (fig. 9.2, *a*). În acest caz, se procedează astfel:

— Se trasează profilul camei la scara lungimilor k_l, precizîndu-se succesiv *cercul de bază* (C_B) cu centrul în A_0 și rază r_0, *cercul de vîrf* (C_V) cu centrul în A_0 și raza $R=r_0+h$ (h este deplasarea maximă a tachetului — cursa tachetului), unghiurile de *ridicare* φ_1, *de staționare pe cercul de vîrf* φ_2, *de coborîre* φ_3 și de *staționare pe cercul de bază* φ_4. Unghiurile φ_1 și φ_3 se împart într-un număr de părți egale.

— Pentru diferite unghiuri φ^1_{10}, φ^1_{20} ... (ale unghiului φ_1), respectiv φ^3_{10}, φ^3_{20}... (ale unghiului φ_3), stabilite în raport cu poziția tachetului Δ^0_2 aleasă ca origine, se măsoară deplasările corespunzătoare s^1_{10}, s^1_{20}..., s^1_{03}, s^3_{20} ale punctului A_2, între cercul de bază (C_B) și cercul de vîrf (C_V),

— Se transpun deplasările $s_{l0}(i=1, 2\ldots)$ într-un sistem de axe carteziane de coordonate, rezultînd diagrama $s_{A_2}=s_{A_2}(\varphi)$. Scările diagramei sînt $k_s \equiv k_l$ $\left[\frac{m}{mm}\right]$ pentru deplasări și k_φ $\left[\frac{rad\ s^{-1}}{mm}\right]$ pentru unghiuri.

Observație. Această diagramă se poate obține rabătînd, cu centrul în A_0, punctele 0, 1, 2... de pe profilurile de ridicare și de coborîre (rezultate din împărțirea unghiurilor φ_1 și φ_3 în părți egale) pe direcția Δ^0_2, deasupra lui A_0. La rîndul lor, aceste puncte se transpun pe axa verticală Os_{A_2} a unui sistem de axe ce are axa absciselor 0_φ tangentă la cercul de bază C_B al camei (fig. 9.2, *b*).

Tachet translant excentric (fig. 9.2, *c*). În acest caz, se procedează astfel:

— Se trasează profilul camei precizîndu-se cercul de bază (C_B), cercul de vîrf (C_V), *cercul excentricității* (C_e) de rază e și unghiurile φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Cele două unghiuri φ_1, φ_3 se împart într-un număr de părți egale.

— Deplasările tachetului rezultă în același mod cu mențiunea că ele se măsoară pe *tangentele la cercul excentricității* (C_e) duse de *aceeași parte* a acestui cerc.

Tachet translant cu rolă (fig. 9.2, *d*). În acest caz, rezolvarea este identică cu precizarea că deplasările tachetului se măsoară între cercul de bază (C_B) și profilul echidistant (Γ_B).

Tachet oscilant cu rolă (fig. 9.2, *e*). În acest caz, se procedează astfel:

— Se trasează mecanismul la scara k_l precizîndu-se cercul de bază (C_B), cercul de vîrf (C_V), unghiurile φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, cercul rolei (C_r) cu centrul în B și raza r_r, lungimea tachetului (BB_0).

— Aplicînd inversiunea mișcării, cama devine fixă, iar articulația B_0 a tachetului se deplasează pe cercul (C_{B0}) cu centrul în A_0 și raza A_0B_0, rola aflîndu-se în contact permanent cu profilul real al camei.

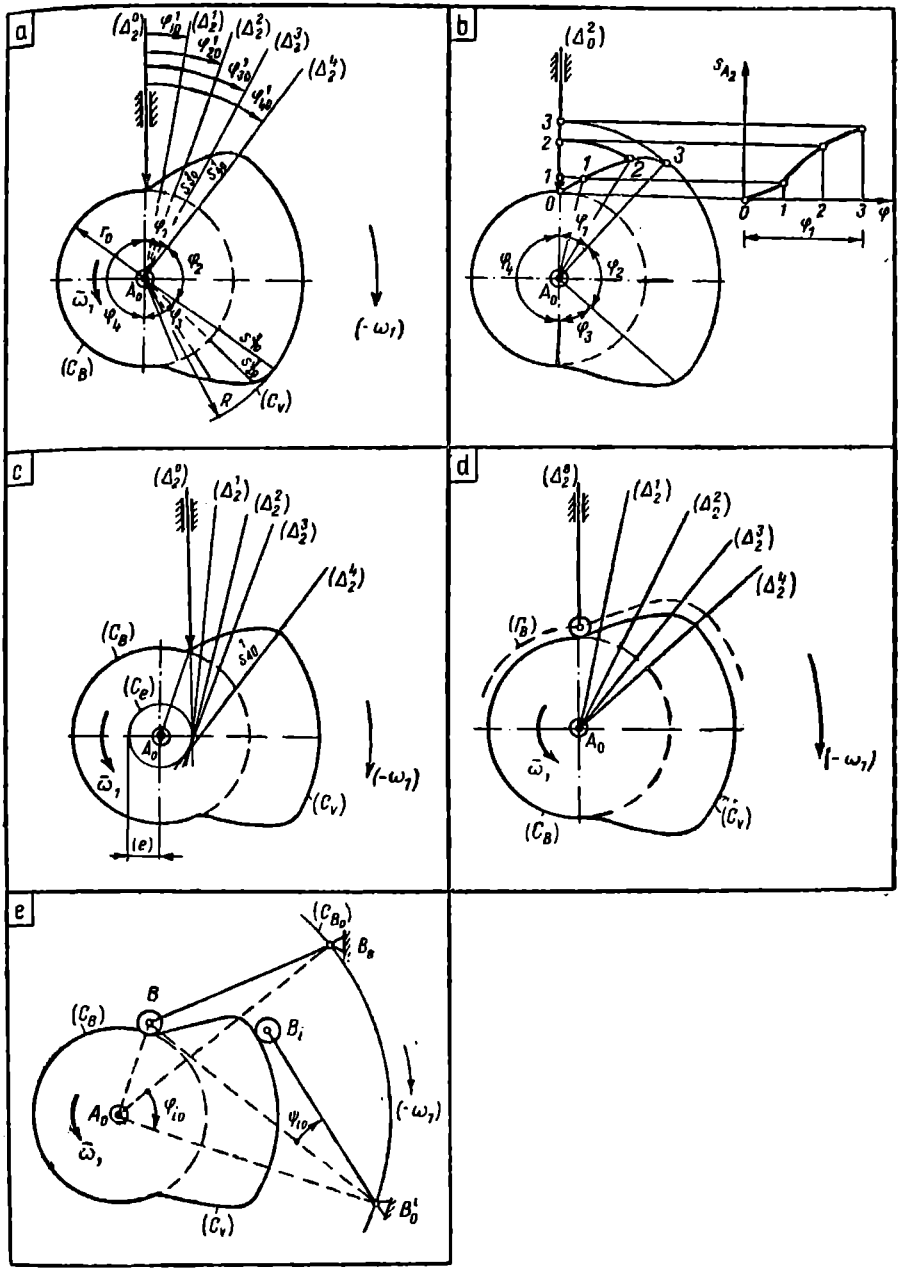


Fig. 9.2. Determinarea deplasărilor sau unghiurilor de oscilaţie ale tachetului la mecanismele cu came rotative:

a — tachet translant axial (prima metodă); *b* — tachet translant axial (metoda a doua); *c* — tachet translant excentric; *d* — tachet translant cu rolă; *e* — tachet oscilant cu rolă.

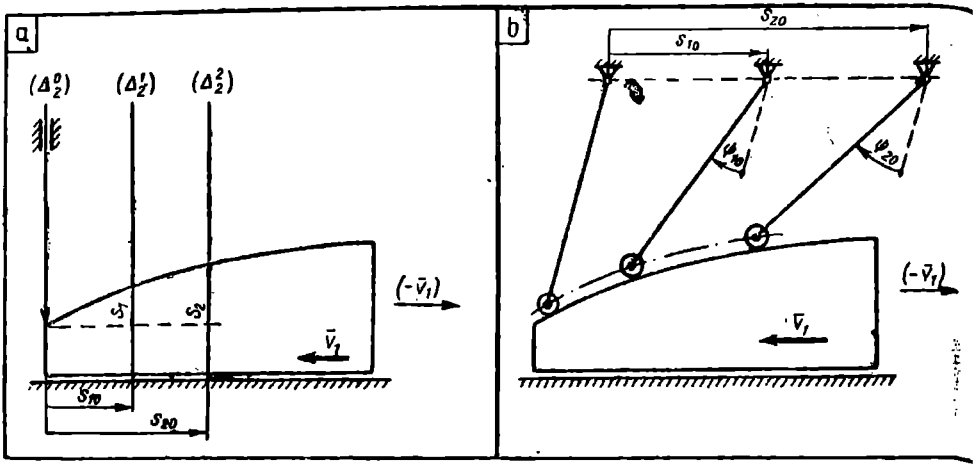


Fig. 9.3. Determinarea deplasărilor sau a unghiurilor de oscilație ale tachetului la mecanismele cu came translante:

a — tachet translant cu vîrf; *b* — tachet oscilant cu rolă.

— Se precizează unghiurile de rotație $\varphi_{10}(i=1, 2\ldots)$ ale camei măsurate între direcția inițială A_0B_0 și direcția $A_0B_0^i$ $(i=1, 2\ldots)$. Corespunzător acestora rezultă *unghiurile de oscilație* $\psi_{10}(i=1, 2\ldots)$ măsurate între dreapta B_0^iB dusă din poziția B_0^i $(i=1, 2\ldots)$ la centrul rolei din poziția inițială și direcția tachetului $B_0^iB_i(i=1, 2\ldots)$ în poziția considerată $B_0^iB_i$. Curba deplasării tachetului este $\psi_{10}=\psi(\psi_{10})$.

Mecanismele cu camă de translație (fig. 9.3) pot avea:

Tachet translant cu vîrf (fig. 9.3, a). Procedeul grafic este următorul:

— Se construiește profilul camei la scara k_l;

— Aplicîndu-se principiul inversiunii mișcării, curba deplasărilor tachetului este reprezentată chiar de profilul camei.

Tachet oscilant cu rolă (fig. 9.3, *b*). Procedeul grafic este următorul:

— Prin inversiunea mișcării cama devine fixă, iar articulația B_0 a tachetului capătă o mișcare de translație, rola rămînînd permanent în contact cu profilul camei.

— Se măsoară unghiurile de oscilație $\psi_{10}(i=1, 2, \ldots)$ ale tachetului față de o axă de origine (în figură poziția extremă din stînga a tachetului), în funcție de deplasările $s_{10}(i=1, 2\ldots)$ ale camei. Curba deplasării tachetului este $\psi_{10}=\psi(s_{10})$.

9.2.2. DETERMINAREA DIAGRAMELOR VITEZEI REDUSE ȘI A ACCELERAȚIEI REDUSE ALE TACHETULUI

Algoritmul obținerii celor două diagrame este același și el constă în parcurgerea următoarelor etape:

— Se așază axele diagramei vitezei reduse $v_{A_2}^{red}(\varphi)$, și a accelerației reduse $a_{A_2}^{red}(\varphi)$ sub cea a deplasării tachetului $s_{A_2}(\varphi)$, respectîndu-se împărțirea unghiurilor φ_1 și φ_3 (fig. 9.4).

— Se împarte abscisa curbei deplasării tachetului într-un număr de intervale egale $(\Delta\varphi)$, conform împărțirii unghiurilor φ_1 și φ_3, la capetele cărora punctele sînt Q_j, Q_{j+1} $(j=1, 2\ldots)$ — figura 9.4, *a*.

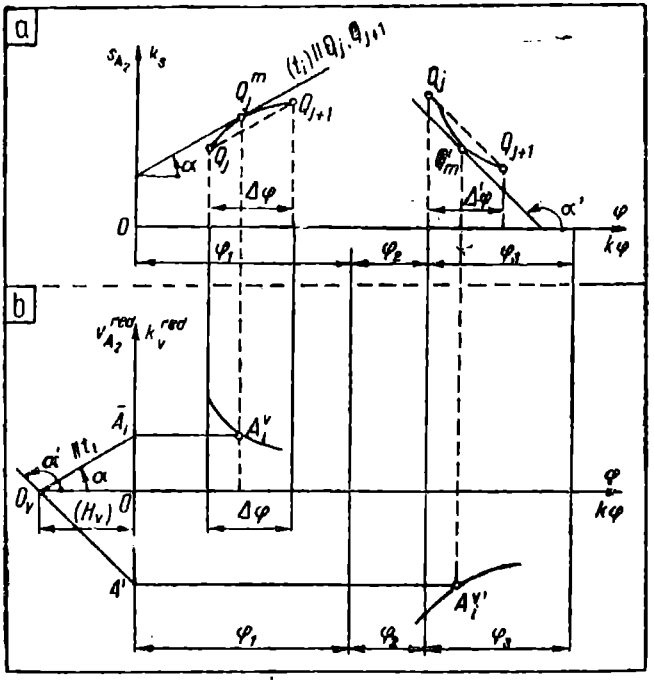


Fig. 9.4. Principiul derivării grafice:
a — diagrama ${}^{0}_{A_2}(\varphi)$;
b — diagrama $v^{red}_{A_2}(\varphi)$.

— Prin punctele mediane Q^m_j $(j=1, 2\ldots)$, Q'^m_j $(j=1, 2\ldots)$ ale intervalelor se duc tangentele t_i paralele cu coardele Q_i, Q_{i+1}.

— Se alege în diagrama vitezei reduse (fig. 9.4, *b*) *polul de derivare* O_v la o *distanță polară* (H_v) arbitrar aleasă. Din O_v se duc dreptele $O_v\overline{A}_i (i=1, 2\ldots)$ paralele la tangentele t_i. Orizontalele din $\overline{A}_j \in Ov^{red}_{A_2}$ intersectează verticalele punctelor mediane ale intervalelor, în $\ldots A^v_i (i=1, 2\ldots)$, $A^{v'}_i (i=1, 2\ldots)$, care reprezintă puncte ale diagramei vitezei reduse a tachetului.

— Se unesc cu o linie continuă punctele $A^v_i (i=1, 2\ldots)$, $A^{v'}_i (i=1, 2\ldots)$, rezultînd curba vitezei reduse a tachetului $v^{red}_{A_2} = v_{A_2}/\omega_1$ la scara $k^{red}_v = \frac{1}{(H_v)} \frac{k_s}{k_\varphi}$.

— În mod asemănător se obține și curba accelerației reduse a tachetului $a^{red}_{A_2} = a_{A_2}/\omega_1^2$ la scara $k^{red}_a = \frac{1}{(H_a)} \frac{k^{red}_v}{k_\varphi}$ unde (H_a) este distanța polară arbitrar aleasă din diagrama respectivă.

Operația de determinare pe cale grafică a curbelor vitezei reduse și a accelerației reduse a tachetului se numește *derivare grafică*.

Exemplul 9.1. Să se construiască diagramele cinematice ale mecanismului cu camă rotativă și tachet translant cu rolă (fig. 9.5) pentru unghiul de ridicare φ_1.

Rezolvare. Unghiul de ridicare φ_1 se împarte în șase părți egale, notate pe profilul echidistant al camei prin punctele $A_1 \ldots A_7$, care se transpun mai întîi pe direcția inițială a tachetului (Δ^0_2) și apoi pe axa ordonatelor diagramei deplasării ta-

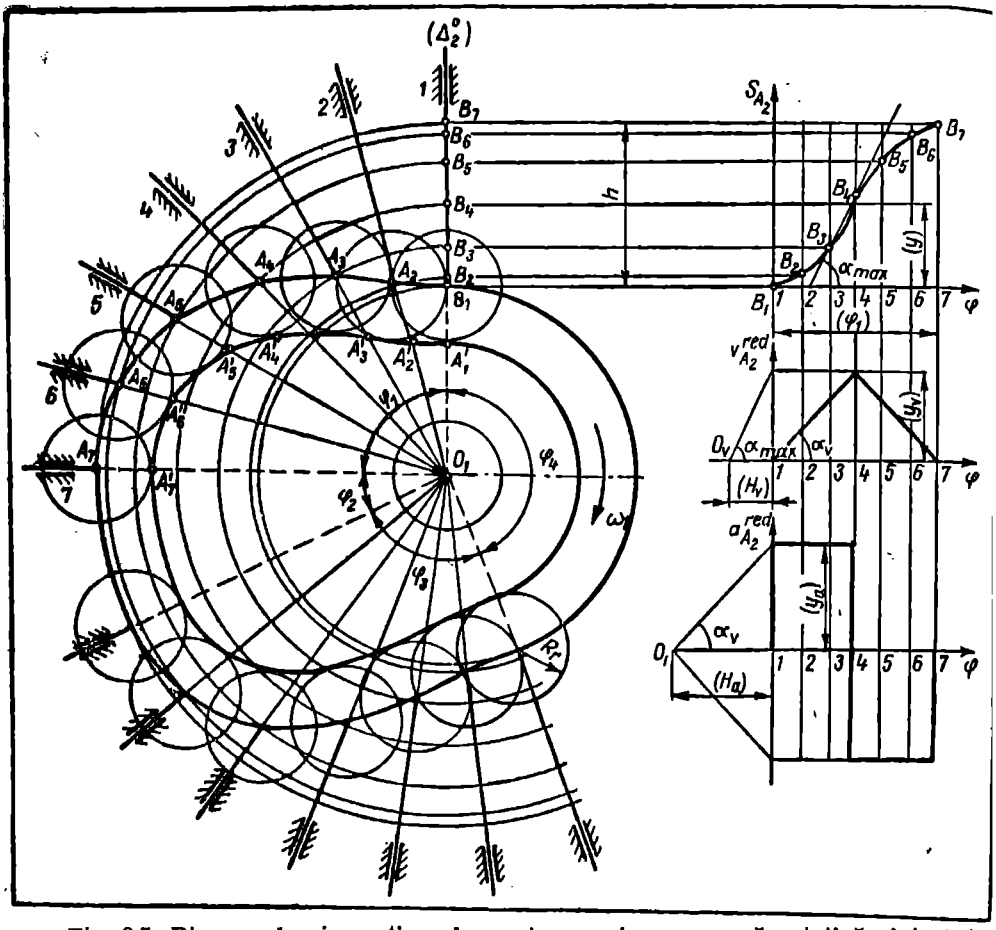


Fig. 9.5. Diagramele cinematice ale unui mecanism cu camă rotativă şi tachet translant cu rolă.

chetului, la aceeaşi scară k_s, în funcţie de abscisele corespunzătoare împărţirii unghiului φ_1. Se obţin punctele B_1, $B_2 \ldots B_7$ care se unesc cu o linie continuă. Rezultă astfel diagrama deplasării tachetului $s_{A_2} = s_{A_2}(\varphi)$ care este compusă din două arce de parabolă cu punctul B_4 punct de inflexiune. Tangenta comună în punctul B_4 determină unghiul α_{max}.

Pentru trasarea diagramei vitezei reduse a tachetului se alege polul de derivare O_v la o distanţă oarecare (H_v) în care se construieşte unghiul α_{max} obţinîndu-se ordonata maximă (y_v) corespunzătoare punctului 4 de pe axa absciselor. Viteza acestui punct este $\overline{v}_{B_4} = k_v(\overline{y}_v)\omega_1$. Diagrama vitezei reduse este liniară, dreapta fiind înclinată cu unghiul α_v.

Diagrama acceleraţiei reduse se trasează în mod similar, alegîndu-se polul de derivare la o distanţă arbitrară (H_a). Pentru acceleraţia redusă se obţine o dreaptă paralelă cu axa absciselor avînd *salturi de acceleraţie cu schimbare de sens* în punctele 1, 4 şi 7, care provoacă *şocuri dure* în mecanism datorită forţelor de inerţie dezvoltate. Aceste şocuri pot avea ca urmări creşterea bruscă a solicitării dinamice a elementelor cinematice, uzura profilului camei şi deformaţii remanente locale care conduc, în final, la nerespectarea legii de mişcare. Acceleraţia maximă are valoarea $\overline{a}_{B_4} = k_a(\overline{y}_a)\omega_1^2$.

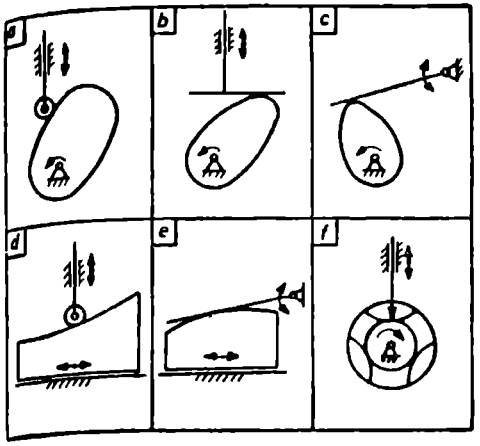
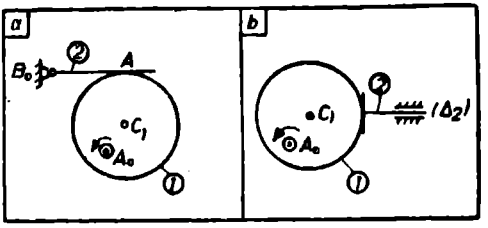


Fig. 9.6. Diverse mecanisme cu camă.

Fig. 9.7. Mecanism cu camă rotativă:
a — tachet oscilant; *b* — tachet translant plan.



VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Ce denumiri poartă mecanismele cu came din figura 9.6?*
2. *Care sînt mecanismele înlocuitoare cu cuple inferioare ale mecanismelor cu camă rotativă și tachet oscilant, respectiv translant plan (fig. 9.7)?*
3. *Cum se trasează diagrama de deplasare a tachetului la o camă rotativă cu tachet translant dezaxat?*
4. *Care sînt relațiile dintre scările diagramelor cinematice ale unui mecanism cu camă rotativă?*
5. *Indicați principiul derivării grafice.*

10

CINEMATICA GRAFOANALITICĂ A MECANISMELOR CU ROȚI DINȚATE

10.1. CLASIFICAREA, DENUMIRILE ȘI VARIANTELE CONSTRUCTIVE ALE ELEMENTELOR CINEMATICE

Se deosebesc:

— mecanisme alcătuite din două roți dințate numite *angrenaje simple;*

— mecanisme alcătuite din minimum trei roți dințate numite *angrenaje multiple* sau *trenuri cu roți dințate.*

Utilizarea mecanismelor cu roți dințate este foarte vastă în construcția de mașini, aparate și instalații, începînd cu mecanisme de ceasornic — caracterizate prin puteri și viteze periferice reduse — și terminînd cu turbine care funcționează la puteri de zeci de mii de kilowați și viteze periferice de 100—150 m/s.

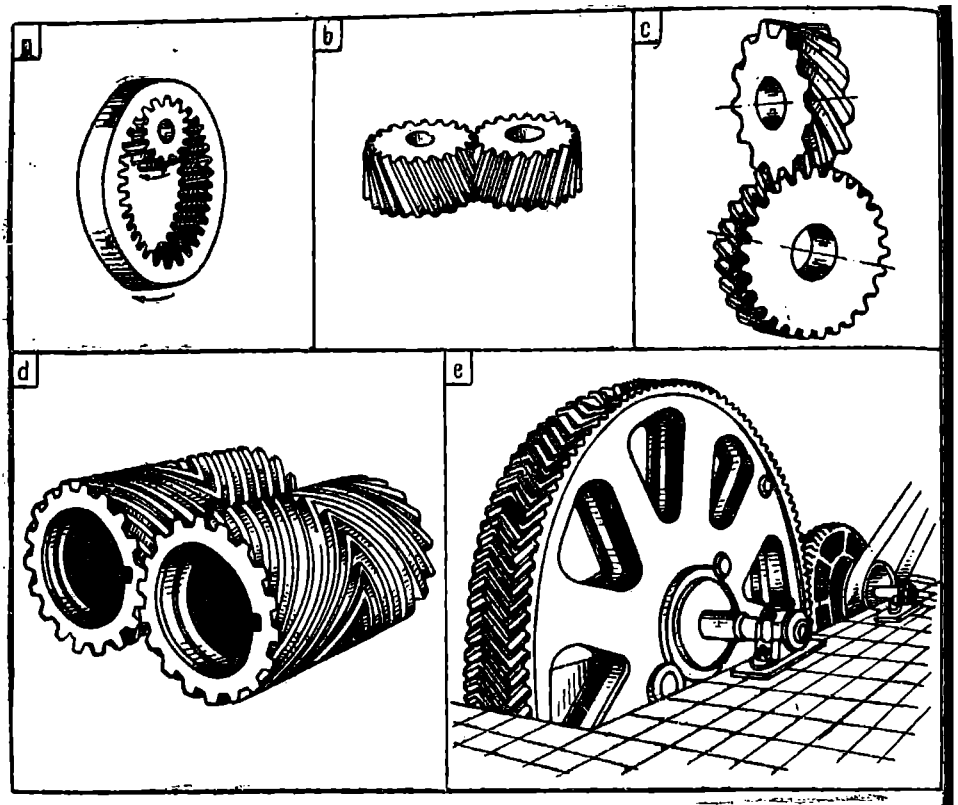


Fig. 10.1. Tipuri de danturi la roţile dinţate:
a — dinţi drepţi; *b* — dinţi înclinaţi; *c* — dinţi curbi; *d* — dinţi în V; *e* — dinţi în W.

În aceste condiţii, roţile dinţate pot fi executate cu diametre cuprinse între fracţiuni de milimetru pînă la mai mult de 10 *m*. Dantura roţilor poate fi *simplă* (cu dinţi drepţi, înclinaţi sau curbi) sau *compusă* (cu dinţi în V şi în W) — figura 10.1.

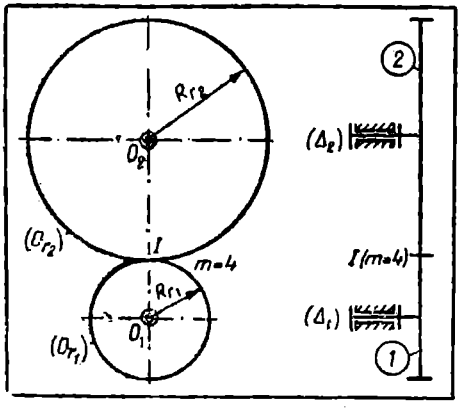


Fig. 10.2. Schema cinematică a angrenajului cilindric.

Cel mai simplu mecanism cu roţi dinţate este *angrenajul* (fig. 10.2). El este constituit din două roţi prevăzute cu *danturi* cu ajutorul cărora se transmite direct, printr-o cuplă cinematică superioară *I* de clasa a *IV-a* ($m=4$), mişcarea de rotaţie şi forţa de la roata conducătoare *1* (numită şi *pinion*) la roata condusă *2*.

Roţile dinţate cilindrice se reprezintă grafic în studiile de analiză cinematică prin discuri delimitate prin cercul propriu de *rulare (rostogolire)* C_r care reprezintă cercul cvasimedian dintre vîrful şi piciorul dintelui.

Cupla superioară *I* de clasa a *IV*-a formată de contactul a doi dinți este nereversibilă și deschisă.

Prin definiție se numește *raport de transmitere* (i_{12}) raportul dintre vitezele unghiulare ale roții conducătoare (ω_1) și conduse (ω_2) aflate în angrenare

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{10.1}$$

indicele 12 indicînd sensul transmiterii mișcării. Dacă $i_{12}>1$ mecanismul se numește *reductor* (roata condusă are viteza unghiulară mai mică decît cea a roții conducătoare), iar dacă $i_{12}<1$ mecanismul este *multiplicator* (roata condusă are o viteză unghiulară mai mare decît cea a roții conducătoare).

Angrenajele (tab. 10.1) pot fi clasificate după următoarele criterii principale: poziția axelor arborilor, forma suprafețelor exterioare ale roților, felul angrenării, raportul de transmitere realizat și starea cinematică a axelor arborilor.

10.2. LEGEA FUNDAMENTALĂ A ANGRENĂRII

Legea fundamentală a angrenării are următorul enunț: „*Normala comună la cele două profiluri în contact ale dinților intersectează linia centrelor O_1O_2 într-un punct I, numit polul angrenării, astfel încît raportul celor două segmente (IO_2/IO_1) este direct proporțional cu raportul de transmitere ($i_{12}=\omega_1/\omega_2$). Dacă $i_{12}=const.$, atunci polul I este fix în tot timpul angrenării celor două profiluri*“ — figura 10.3.

Notînd cu: ω_1, ω_2 și n_1, n_2 — vitezele unghiulare, respectiv turațiile celor două roți; R_{r1}, R_{r2} — razele cercurilor de rostogolire; z_1, z_2 — numerele de dinți, legea fundamentală a angrenării se poate exprima prin relația:

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}=\pm\frac{R_{r2}}{R_{r1}}=\pm\frac{z_2}{z_1}, \tag{10.2}$$

semnul plus luîndu-se pentru angrenarea interioară și semnul minus pentru angrenarea exterioară. În legătură cu legea fundamentală a angrenării sînt de făcut următoarele observații:

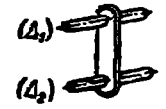
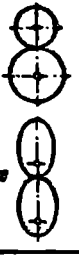
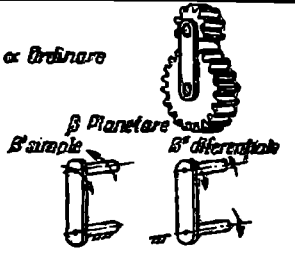
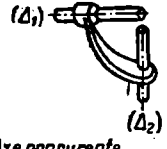
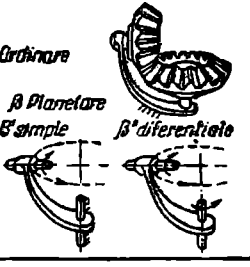
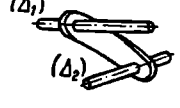
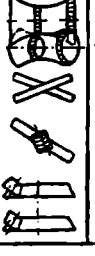
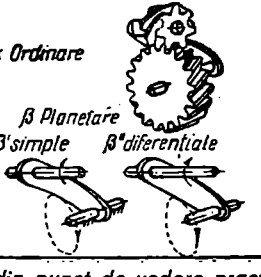
— relația (10.2) se aplică tuturor mecanismelor cu roți dințate avînd *axele fixe;*

— proiecțiile vitezelor punctelor suprapuse în momentul considerat al mișcării (M_1, M_2 — fig. 10.3), care aparțin profilurilor dinților celor două roți în contact (*1* și *2*), pe normala comună n_{12} sînt egale:

$$pr_{n_{12}}\bar{v}_{M_1}=pr_{n_{12}}\bar{v}_{M_2}=k_v(Mm_0);$$

— viteza relativă de alunecare $\bar{v}_{M_2M_1}$ dintre cele două profiluri este cu atît mai mică cu cît punctul comun de contact se apropie de polul an-

TABELUL 10.1

Nr. crt.	Poziția axelor arborilor (Δ_1 și Δ_2)	Forma suprafețelor exterioare ale roților	Felul angrenării	Raportul de transmitere i_{12} realizat	Starea cinematică a axelor arborilor α - Axe fixe (angrenaje ordinare) β - Axe fixe și mobile (mecanisme planetare simple sau diferențiale)
1	 I Axe paralele ($\Delta_1 \parallel \Delta_2$; angrenaje cilindrice)	1 Cilindrice 2 Speciale 	A Exterioară B Interioară 	a Circulare ($i_{12} = ct$) b Necirculare ($i_{12} \neq ct$) 	α Ordinare β Planetare β' simple β'' diferențiale 
2	 II Axe concurente ($\Delta_1 \cap \Delta_2$; angrenaje conice)	1 Conice 2 Speciale 	A Exterioară B Interioară 	a Circulare ($i_{12} = ct$) b Necirculare * ($i_{12} \neq ct$) 	α Ordinare β Planetare β' simple β'' diferențiale 
3	 III Axe încrucișate ($\Delta_1 \cap \Delta_2$; angrenaje hiperboloidale)	1 Hiperboloidale 2' Elicoidale 2'' Melc-roată melcată 3 Hipoide 4 Speciale 	A Exterioară B Interioară 	a Circulare ($i_{12} = ct$) b Necirculare ($i_{12} \neq ct$) 	α Ordinare β Planetare β' simple β'' diferențiale 

* Nu prezintă interes din punct de vedere practic.

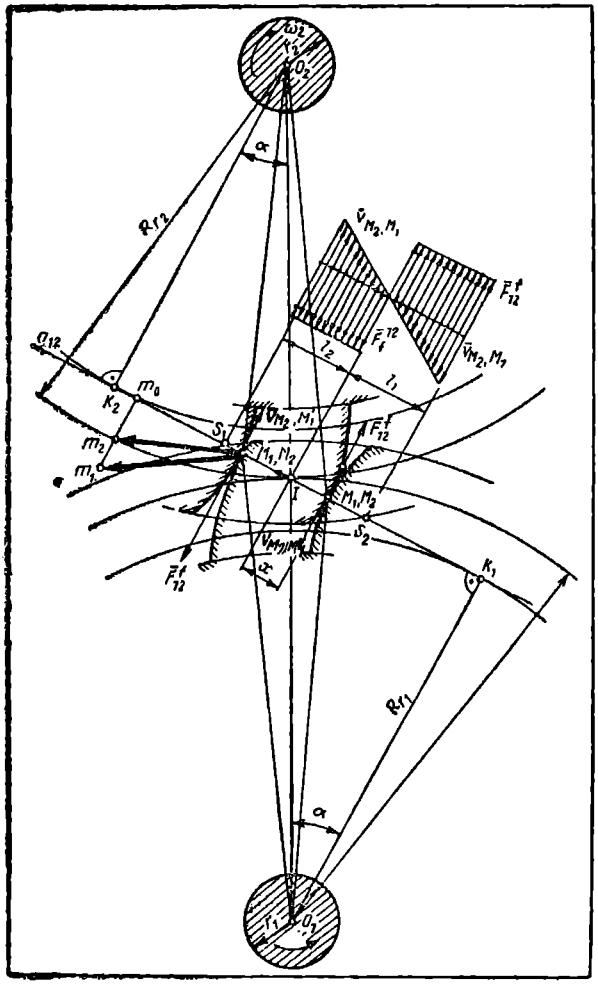


Fig. 10.3. Legea fundamentală a angrenării.

grenării *I*. Ea se anulează în *I*, după care schimbă de sens (fig. 10.3). Rezultă că polul angrenării este singurul punct din tot timpul angrenării unde nu există alunecare între profiluri, acestea fiind în rostogolire pură. Alunecarea profilurilor produce *uzura dinților* și *consum de lucru mecanic prin frecare*. Efectele acestor inconveniente se reduc printr-o prelucrare fină și precisă a roților și printr-o ungere corectă (majoritatea angrenajelor de puteri și turații mari funcționează în băi de ulei).

10.3. CINEMATICA ANGRENAJELOR CU AXE PARALELE FIXE (ANGRENAJE CILINDRICE)

Angrenajele cilindrice pot avea angrenare exterioară sau interioară. Aceste mecanisme se analizează utilizîndu-se metode analitice și grafo-analitice.

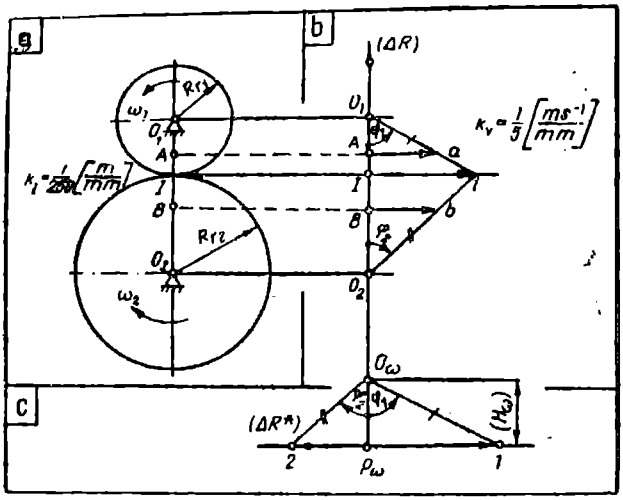


Fig. 10.4. Planele vitezelor liniare şi unghiulare la angrenajul cilindric cu axe fixe şi angrenare exterioară.

Metoda analitică constă în determinarea raportului de transmitere cu ajutorul legii fundamentale a angrenării. Se obţin următoarele expresii

— *pentru angrenarea exterioară* (fig. 10.4)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = -\frac{R_{r2}}{R_{r1}} = -\frac{z_2}{z_1} \qquad (10.3)$$

— *pentru angrenarea interioară* (fig. 10.5)

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{r2}}{R_{r1}} = \frac{z_2}{z_1} \qquad (10.4)$$

Metoda grafoanalitică (metoda Kutzbach) constă în determinarea grafică a raportului de transmitere cu ajutorul planului vitezelor liniare şi al planului vitezelor unghiulare. În acest scop se consideră angrenajul construit la scara lungimilor k_l arbitrar aleasă (fig. 10.4, *a* şi respectiv fig. 10.5, *a*), unde $(O_1I) = R_{r1}/k_l$ şi $(O_2I) = R_{r2}/k_l$.

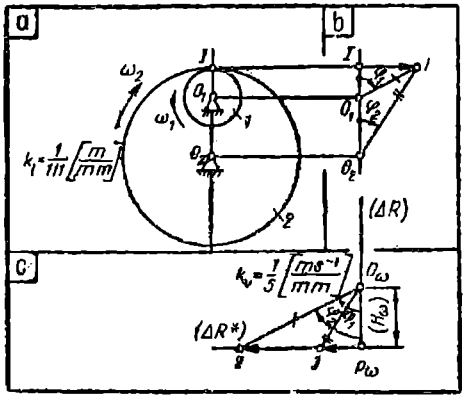


Fig. 10.5. Planele vitezelor liniare şi unghiulare la angrenajul cilindric cu axe fixe şi angrenare inferioară.

a) *Planul vitezelor liniare* (fig. 10.4, *b*, respectiv fig. 10.5, *b*). Alăturat mecanismului se trasează dreapta de referinţă $(\Delta R) \| (O_1O_2)$, pe care se transpun punctele O_1, O_2 (proiecţiile axelor Δ_1 şi Δ_2 pe un plan lateral) şi I (punctul de contact dintre roţi). În punctul $I \in (\Delta R)$ se construieşte, la scara vitezelor k_v, viteza punctului I reprezentată de vectorul $\overline{(Ii)} = \frac{\overline{v_I}}{k_v}$, unde $v_I \equiv v_{I1} \equiv v_{I2} = R_{r1}\omega_1 = R_{r2}\omega_2$. Se uneso prin drepte punctele de viteză nulă O_1, $O_2 \in (\Delta R)$ cu punctul i obţinîndu-se dreptele (O_1i), (O_2i) care reprezintă *locurile geometrice ale extremităţilor vectorilor viteză ale tu-*

turor punctelor situate pe ambele roți. De exemplu: $\overline{v_A}=k_v(\overline{Aa})$; $\overline{v_B}=k_v(\overline{Bb})$. În acest fel s-a construit planul vitezelor liniare, triunghiurile $(1iO_1)$ și respectiv $(1iO_2)$ reprezentînd distribuțiile vitezelor pe roțile *1* și *2*, date de unghiurile φ_1 și φ_2 al căror *sens de măsurare indică și sensul de rotație al roților.* Din aceste triunghiuri se deduc relațiile:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{(I1)}{(O_1I)}=\frac{v_{I1}/k_v}{R_{r1}/k_l}=\frac{k_l}{k_v}\,\frac{R_{r1}\omega_1}{R_{r1}}=\frac{\omega_1}{k_\omega^*}\Leftrightarrow\boxed{\omega_1=k_\omega^*\operatorname{tg}\varphi_1} \tag{10.5}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{(I1)}{(O_2I)}=\frac{v_{I2}/k_v}{R_{r2}/k_l}=\frac{k_l}{k_v}\,\frac{R_{r2}\omega_2}{R_{r2}}=\frac{\omega_2}{k_\omega^*}\Leftrightarrow\boxed{\omega_2=k_\omega\operatorname{tg}\varphi_2} \tag{10.6}$$

unde

$$\boxed{k^*=k_v/k_l}\ [s^{-1}]. \tag{10.7}$$

Rezultă raportul de transmitere

$$\boxed{i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}}. \tag{10.8}$$

Planul vitezelor unghiulare (fig. 10.4, *c*, respectiv fig. 10.5, *c*). Se construiește linia de referință $(\Delta R^*)\perp(\Delta R)$. Intersecția celor două linii de referință determină polul vitezelor unghiulare p_ω. Din polul p_ω se măsoară pe direcția (ΔR) distanța arbitrară (H_ω) [mm] rezultînd punctul $O_\omega\in(\Delta R)$. În O_ω se construiesc unghiurile φ_1 și φ_2 ducînd paralele la dreptele (O_1i), respectiv (O_2i) din planul vitezelor liniare. Aceste paralele intersectează linia de referință (ΔR^*) în punctele *1* și *2*. Dacă se scriu relațiile (10.5) și (10.6) explicitîndu-se tg φ_1 și tg φ_2 cu elementele geometrice corespunzătoare din planul vitezelor unghiulare rezultă

$$\omega_1=k_\omega^*\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_v}{k_l}\,\frac{(p_\omega 1)}{(H_\omega)}=\boxed{k_\omega(p_\omega 1)} \tag{10.9}$$

$$\omega_2=k_\omega^*\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{k_v}{k_l}\,\frac{(p_\omega 2)}{(H^\omega)}=\boxed{k_\omega(p_\omega 2)} \tag{10.10}$$

unde

$$\boxed{k_\omega=\frac{k_v}{k_l(H_\omega)}}\left[\frac{s^{-1}}{mm}\right]. \tag{10.11}$$

Raportul de transmitere se va calcula cu relația

$$\boxed{i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{(p_\omega 1)}{(p_\omega 2)}}. \tag{10.12}$$

Observații

1) Orientarea vectorilor viteză unghiulară în planul vitezelor unghiulare indică semnul raportului de transmitere. Astfel, în cazul angrenării exterioare, vectorii $\overline{\omega_1}=k_\omega(\overline{p_{\omega^1}})$ și $\overline{\omega_2}=k_\omega(\overline{p_{\omega_2}})$ au sensuri contrare și deci raportul de transmitere i_{12} este negativ, spre deosebire de cazul angrenării interioare la care vitezele unghiulare respective au același sens, raportul de transmitere fiind pozitiv.

2) Planul vitezelor unghiulare reprezintă, în același timp, și *planul turațiilor* reprezentat la scara turațiilor $k_n=\frac{30}{\pi}k\omega$ $\left(\text{dedusă din relația } n=\frac{30}{\pi}\omega\right)$.

Exemplul 10.1. Folosind metoda grafoanalitică să se determine viteza unghiulară ω_2 a roții conduse și raportul de transmitere i_{12} pentru angrenajul cilindric cu angrenare exterioară (v. fig. 10.4). Se cunosc $\omega_1=97{,}28$ rad s^{-1}, $R_{r_1}=0{,}03$ m și $R_{r_2}=0{,}052$ m.

Rezolvare. Rezultatele sînt indicate în tabelul 10.2.

TABELUL 10.2

Angrenajul cilindric cu axe fixe și angrenare exterioară — valori numerice (date și calculate)

Date			Scări adoptate				Valori calculate necesare construcției planelor de viteze liniare și unghiulare				Rezultate obținute prin calcul grafic		Eroarea calculului grafic (pentru i_{12})
R_{r1}	R_{r2}	ω_1	k_l	k_v	$k^*_\omega=\frac{k_v}{k_l}$	$k\omega$	(R_{r1})	(R_{r2})	v_l	$(\overline{li})$	ω_2	i_{12}	e
m	m	rad s^{-1}	$\frac{m}{mm}$	$\frac{ms^{-1}}{m}$	s^{-1}	$\frac{s^{-1}}{mm}$	mm	mm	ms^{-1}	mm	rad s^{-1}	—	%
0,03	0,052	97,28	$\frac{1}{250}$	$\frac{1}{5}$	50	5,88	7,5	13	2,9184	14,6	55,57	1,75	1%

Exemplul 10.2. Să se determine prin metoda grafoanalitică viteza unghiulară ω_2 și raportul de transmitere i_{12} pentru angrenajul cilindric cu angrenare interioară din figura 10.5, cunoscîndu-se $\omega_1=47{,}1$ rad s^{-1}, $Rr_1=0{,}0315$ m, $Rr_2=0{,}104$ m.

Rezolvare. În tabelul 10.3 sînt date rezultatele calculului grafoanalitic.

TABELUL 10.3

Angrenajul cilindric cu axe fixe și angrenare interioară — valori numerice (date și calculate)

Date			Scări adoptate				Valori calculate necesare construcției planelor de viteze liniare și unghiulare				Rezultate obținute prin calcul grafic		Eroarea calculului grafic (pentru i_{12})
R_{r_1}	R_{r_2}	ω_1	k_l	k_v	$k^*_\omega=\frac{k_v}{k_l}$	$k\omega$	(R_{r_1})	(R_{r_2})	v_l	$(\overline{li})$	ω_2	i_{12}	e
m	m	rad s^{-1}	$\frac{m}{mm}$	$\frac{ms^{-1}}{mm}$	s^{-1}	s^{-1}	mm	mm	ms^{-1}	mm	rad s^{-1}	—	%
0,0315	0,104	47,1	$\frac{1}{111}$	$\frac{1}{5}$	22,2	2,22	3,5	11,54	1,48	7,4	14,7	3,29	0,3%

10.4. CINEMATICA ANGRENAJELOR CU AXE CONCURENTE FIXE (ANGRENAJE CONICE)

Angrenajele conice pot fi construite cu angrenare exterioară (fig. 10.6, fig. 10.7) sau interioară (fig. 10.8).

Metoda grafoanalitică constă *numai* în construirea planului vitezelor unghiulare deoarece distribuţiile de viteze liniare nu se pot trasa fiind în plane diferite perpendiculare pe axele Δ_1 şi Δ_2 ale roţilor. Cu ajutorul planului vitezelor unghiulare se determină grafic raportul de transmitere, cunoscînd viteza unghiulară $\bar{\omega}_1$ a roţii conducătoare *1* (în mărime, direcţie şi sens). În acest scop se trasează mai întîi mecanismul la scara lungimilor k_l, după care se rezolvă grafic, la scara vitezelor unghiulare k_ω, ecuaţia vectorială de compunere a vitezelor unghiulare.

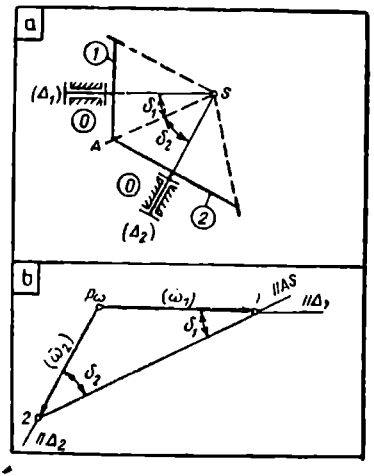


Fig. 10.6. Angrenajul conic cu axe fixe şi angrenare exterioară avînd semiunghiul la centru.

a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor unghiulare.

$$\frac{\bar{\omega}_2}{\|\Delta_2} = \frac{\bar{\omega}_1}{\|\Delta_1} + \frac{\bar{\omega}_{21}}{\|AS}$$

Din planul vitezelor unghiulare (fig. 10.6, *b*, fig. 10.7, *b*, respectiv fig. 10.8, *b*) rezultă: $\omega_2 = k_\omega (p_\omega 2)$; $\omega_{21} = k_\omega (12)$; $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{(p_\omega 1)}{(p_\omega 2)}$.

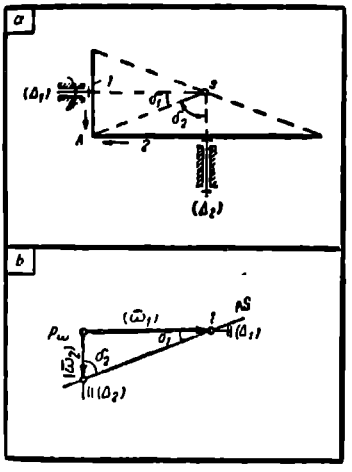


Fig. 10.7. Angrenajul conic cu axe fixe şi angrenare exterioară avînd semiunghiul la centru.

$\delta = 90°$:

a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor unghiulare.

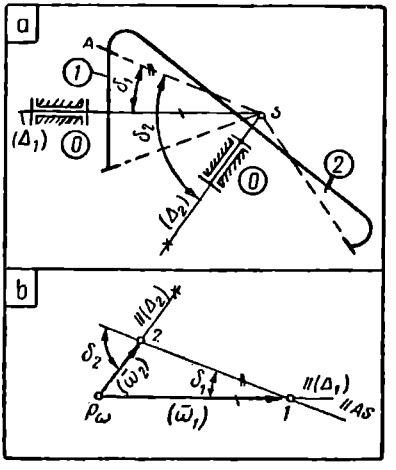


Fig. 10.8. Angrenajul conic cu axe fixe şi angrenare interioară:

a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor unghiulare.

Metoda analitică se bazează pe aplicarea succesivă a teoremei sinusurilor și respectiv cosinusurilor în planul vitezelor unghiulare (fig. 10.6, *b*, respectiv fig. 10.8, *b*).

— Aplicînd teorema sinusurilor se obține relația

$$\frac{\omega_1}{\sin \delta_2} = \frac{\omega_2}{\sin \delta_1}$$

care servește la stabilirea raporturilor de transmitere

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{r2}}{R_{r1}} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}. \tag{10.13}$$

— Din aplicarea teoremei cosinusurilor se deduce

$$\omega_{21} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \delta} = \omega_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + 2 \cos \delta}.$$

Înlocuind $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{z_1}{z_2}$ rezultă

$$\omega_{21} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \delta_1}{\sin^2 \delta_2} + 2 \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} \cos \delta} = \omega_1 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2 \frac{z_1}{z_2} \cos \delta}. \tag{10.14}$$

În cazul particular cînd $\delta = 90°$ (fig. 10.7), relațiile (10.13) și (10.14) devin

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{r2}}{R_{r1}} = \frac{z_2}{z_1} = \operatorname{ctg} \delta_1 \tag{10.15}$$

$$\omega_{21} = \omega_1 \sqrt{1 + \frac{\sin^2 \delta_1}{\sin^2 \delta_2}} = \omega_1 \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2} \tag{10.16}$$

Observație. Relațiile (10.13), (10.14), (10.15), (10.16), sînt valabile atît pentru angrenajele conice cu angrenare exterioară, cît și pentru cele cu angrenare interioară.

Exemplul 10.3. Să se determine grafic viteza unghiulară ω_2 la mecanismul cu roți dințate conice din figura 10.7, *a*. Se dau $\omega_1 = 100$ rad s^{-1}, $k_\omega = 4 \frac{\text{rad/s}^{-1}}{\text{mm}}$.

Rezolvare. Din planul vitezelor unghiulare (fig. 10.7, *b*) *rezultă* $\omega_2 = k_\omega (p_\omega 2) = 4 \cdot (2) = 36$ rad s^{-1}.

10.5. CINEMATICA ANGRENAJELOR CU AXE OARECARE FIXE

Analiza cinematică a acestor mecanisme constă în trasarea planului vitezelor liniare (prin rezolvarea grafică a ecuației vectoriale de compunere a vitezelor celor două puncte M_1 și M_2 suprapuse la un anumit moment al mișcării) și în determinarea raportului de transmitere. Se exemplifică acest studiu pentru cazul particular al *mecanismului șurub melc-roată melcată* (fig. 10.9, *a*), la care axele Δ_1 și Δ_2 sînt perpendiculare între ele și aparent concurente în M (fig. 10.9, *b*).

Tangenta comună dusă în M formează unghiurile β_1, respectiv β_2 cu axele Δ_1 și Δ_2. Se rezolvă grafic, direct pe mecanism (alegînd polul vitezelor $p_v \equiv M$ și scara vitezelor k_v), ecuația de compunere a vitezelor

$$\frac{\overline{v_{M2}}}{\perp(\Delta_2)} = \frac{\overline{v_{M1}}}{\perp(\Delta_1)} + \frac{\overline{v_{M2M1}}}{\| t_M}$$

rezultînd vitezele $\overline{v}_{M2} = k_v\overline{(p_v m_2)}$, $\overline{v}_{M2M1} = k_v\overline{(m_1 m_2)}$. În continuare se aplică proprietatea, dedusă din legea fundamentală a angrenării, conform căreia proiecțiile vitezelor $\overline{v}_{M1}$ și $\overline{v}_{M2}$ pe normala comună sînt egale. Se obține astfel relația:

$$v_{M_1}\cos\beta_1 = v_{M_2}\cos\beta_2 \text{ sau } R_{r1}\omega\cos\beta_1 = R_{r2}\omega_2\cos\beta_2.$$

Ținînd seamă că $\beta_1 + \beta_2 = 90°$, relația anterioară devine

$$R_{r1}\omega_1 \sin\beta_2 = R_{r2}\omega_2\cos\beta_2.$$

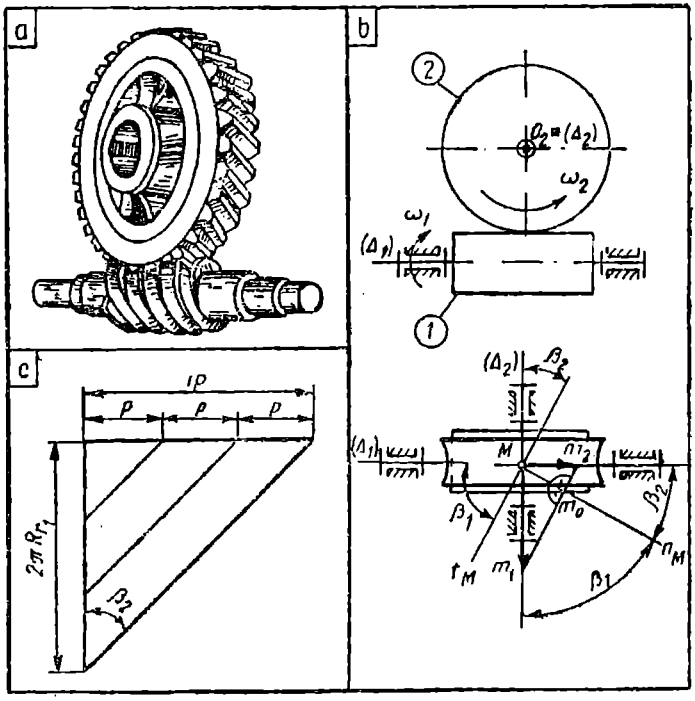


Fig. 10.9. Mecanismul șurub melc-roată melcată:
a — vedere generală; *b* — schema cinematică și planul vitezelor liniare; *c* — suprafața de rulare desfășurată a șurubului melc.

Cu aceste date, raportul de transmitere capătă o primă formă

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{R_{r2}}{R_{r1}}\operatorname{ctg}\beta_2. \qquad (a)$$

Dacă se reprezintă desfășurat suprafața de rulare a șurubului melc *1* — figura 10.9, c — se observă că $\operatorname{ctg}\beta_2=\frac{2\pi R_{r1}}{kp}$ (k — numărul de începuturi, echivalent cu numărul de dinți z_1; p — pasul șurubului). Înlocuind această ultimă relație în (a) în care $\frac{2\pi R_{r2}}{p}=z_2$, se obține relația raportului de transmitere

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{R_{r2}}{R_{r1}}\operatorname{ctg}\beta_2=\frac{z_2}{k} \qquad (10.17)$$

10.6. CINEMATICA TRENURILOR CU ROȚI DINȚATE CU AXE FIXE

10.6.1. TRENURI CU ROȚI DINȚATE CILINDRICE MONTATE ÎN SERIE

Metoda analitică

Se presupune cazul a patru roți dințate montate în serie de raze R_{r1}, R_{r2}, R_{r3}, R_{r4} care au vitezele unghiulare ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 (fig. 10.10).

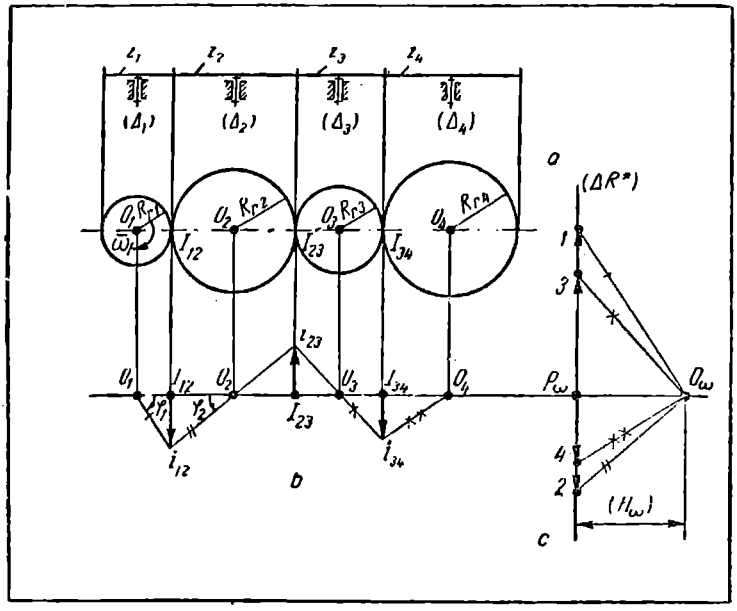


Fig. 10.10. Tren cu roți dințate montate în serie:
a — schema cinematică; b — planul vitezelor liniare; c — planul vitezelor unghiulare.

Pentru determinarea raportului de transmitere i_{14} se scrie mai întîi egalitatea vitezelor liniare în punctele de contact (polurile de angrenare) ale roților (ținîndu-se seama de sensurile de rotație):

$$R_{r1}\omega_1 = -R_{r2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{R_{r1}}{R_{r2}}\omega_1$$

$$-R_{r2}\omega_2 = R_{r3}\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = -\frac{R_{r2}}{R_{r3}}\omega_2 = -\frac{R_{r2}}{R_{r3}}\left(-\frac{R_{r1}}{R_{r2}}\right)\omega_1$$

$$R_{r3}\omega_3 = -R_{r4}\omega_4 \Rightarrow \omega_4 = -\frac{R_{r3}}{R_{r4}}\omega_3 = -\frac{R_{r3}}{R_{r4}}\left(-\frac{R_{r2}}{R_{r3}}\right)\left(-\frac{R_{r1}}{R_{r2}}\right)\omega_1.$$

Din ultima relație se deduce raportul de transmitere dintre roțile *1* și *4*:

$$i_{14} = (-1)^3 \frac{R_{r4}}{R_{r1}} = (-1)^3 \frac{z_4}{z_1}$$

sau

$$i_{14} = -(i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{34}) = (-1)^3 \frac{z_4}{z_1}.$$

Expresia obținută pentru i_{14} arată că schimbarea sensului de rotație a vitezei unghiulare ω_1 s-a produs de trei ori, deoarece mecanismul analizat are trei angrenări exterioare ($m_a = 3$). Generalizînd pentru cazul a n roți dințate montate în *serie* care au m_2 angrenări *exterioare*, relația raportului de transmitere devine:

$$\boxed{i_{1n} = \prod_{j=1}^{n} i_{j,j+1} = (-1)^{m_a} \frac{z_n}{z_1}} \qquad (10.18)$$

Analizînd relația (10.18) se constată următoarele:

— *Raportul de transmitere* i_{1n} nu depinde de nici un parametru geometric al roților dințate intermediare ($2, 3 \ldots n - 1$), motiv pentru care acestea au primit denumirea de *roți parazite*. El este dependent numai de parametrii *primei și ultimei roți.*

— *Numărul roților intermediare* (parazite) nu intervine decît pentru determinarea sensului de rotație la ultima roată, putînd menține sau schimba, după dorință, sensul de rotație al roții conducătoare.

Metoda grafoanalitică

Această metodă constă în trasarea planelor vitezelor liniare și unghiulare conform procedeului Kutzbach (fig. 10.10, *b*, *c*).

10.6.2. TRENURI CU ROȚI DINȚATE CILINDRICE MONTATE ÎN PARALEL (CASCADĂ)

Metoda analitică

Se presupune cazul reprezentat în figura 10.11, *a* al unor roți dințate cilindrice montate în paralel care au razele R_{r1}, R_{r2}, R'_{r2}, R'_{r3}, R_{r4} și vitezele unghiulare ω_1, $\omega_2 \equiv \omega'_2$, $\omega_3 \equiv \omega'_3$, ω_4.

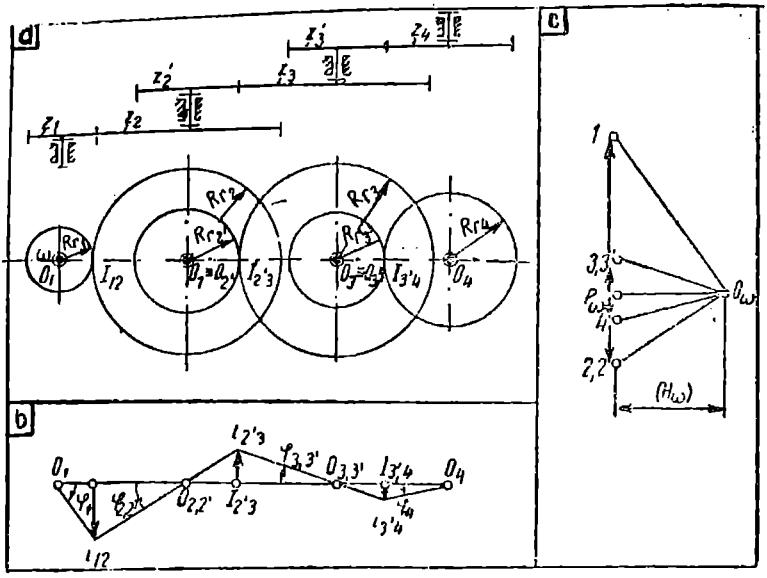


Fig. 10.11. Tren cu roți dințate montate în paralel:
a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor liniare; *c* — planul vitezelor unghiulare.

Pentru determinarea raportului de transmitere i_{14} se scrie mai întîi egalitatea vitezelor liniare în punctele de contact (ținînd seama de sensurile de rotație):

$$R_{r1}\omega_1 = -R_{r2}\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = -\frac{R_{r1}}{R_{r2}}\omega_1;$$

$$-R'_{r2}\omega_2 = R_{r3}\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = -\frac{R'_{r2}}{R_{r3}}\omega_2 = \left(-\frac{R'_{r2}}{R_{r3}}\right)\left(-\frac{R_{r1}}{R_{r2}}\right)\omega_1;$$

$$R'_{r3}\omega_3 = -R_{r4}\omega_4 \Rightarrow \omega_4 = -\frac{R'_{r3}}{R_{r4}}\omega_3 = \left(-\frac{R'_{r3}}{R_{r4}}\right)\left(-\frac{R'_{r2}}{R_{r3}}\right)\left(-\frac{R'_{r1}}{R_{r2}}\right)\omega_1.$$

Raportul de transmitere între roțile *1* și *4* va fi

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^3 \frac{R_{r2}R_{r3}R_{r3}}{R_{r1}R'_{r2}R'_{r3}}$$

sau

$$i_{14} = -(i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}) = (-1)^3 \frac{z_2 z_3 z_4}{z_1 z_{2'} z_{3'}}.$$

Relația obținută pentru i_{14} arată că schimbarea sensului de rotație al vitezei unghiulare ω_1 s-a produs de trei ori deoarece mecanismul analizat are trei angrenări exterioare ($m_e = 3$). Generalizînd relația pentru n arbori cu axele *fixe* și m_e angrenări *exterioare*, relația raportului de transmitere devine

$$i_{1n} = \prod_{j=1}^{n} i_{j,j+1} = (-1)^{m_e} \frac{R_{r2}R_{r3}R_{r4}\ldots R_{rn}}{R_{r1}R'_{r2}R'_{r2}\ldots R'_{r(n-1)}} = (-1)^{m_e} \frac{z_2 z_3 z_4 \ldots z_n}{z_1 z_{3'} z_{3'}, \ldots, z_{(n-1)'}} \qquad (10.19)$$

Din analiza relației (10.19) se deduc următoarele concluzii:

— *Raportul de transmitere* depinde de *toți* parametrii geometrici ai roților dințate montate în paralel.

— *Trenurile cu roți dințate montate în paralel,* realizează o mare varietate de rapoarte de transmitere. De exemplu, pentru un mecanism la care $z_2=z_3=\ldots=z_n$; $z_1=z_2'=z_3'=\ldots=z_{(n-1)'}$; $z_2=2z_1$ *se obține:* $i_{1n}=l_{1n}=(-1)^{n-1}\,2^{n-1}$.

Pentru $n=7$ rezultă $i_{17}=2^6=64$, raport care nu poate fi realizat prin mecanisme cu roți dințate în serie.

Metoda grafoanalitică

Se trasează planul vitezelor liniare și unghiulare (fig. 10.11, *b*).

10.6.3. TRENURI CU ROȚI DINȚATE CILINDRICE MONTATE MIXT (SERIE-PARALEL) — figura 10.12

Pentru determinarea raportului de transmitere se aplică relația (10.19) cu mențiunea că *în calcul nu participă roțile parazite.* Astfel, pentru montajul mixt din figura 10.12 raportul de transmitere i_{15} are valoarea:

$$i_{15}=\frac{z_2z_4z_5}{z_1z_2'z_4'}$$

Calculul grafic se desfășoară conform procedeului Kutzbach (fig. 10.12, *b*, c).

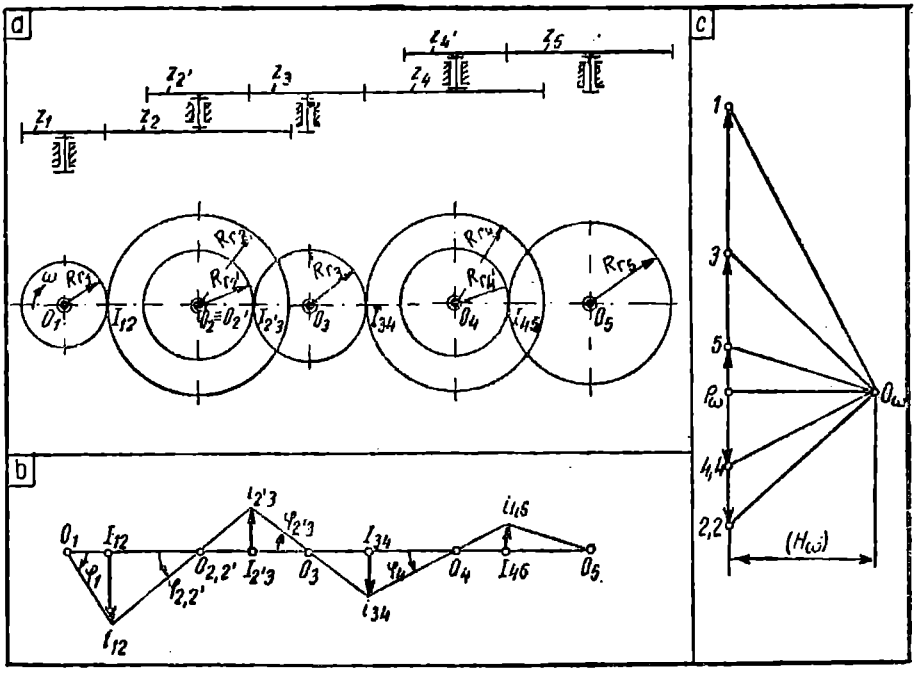


Fig. 10.12. Tren cu roți dințate montate mixt:
a — schema cinematică; *b* — planul vitezelor liniare; c — planul vitezelor unghiulare.

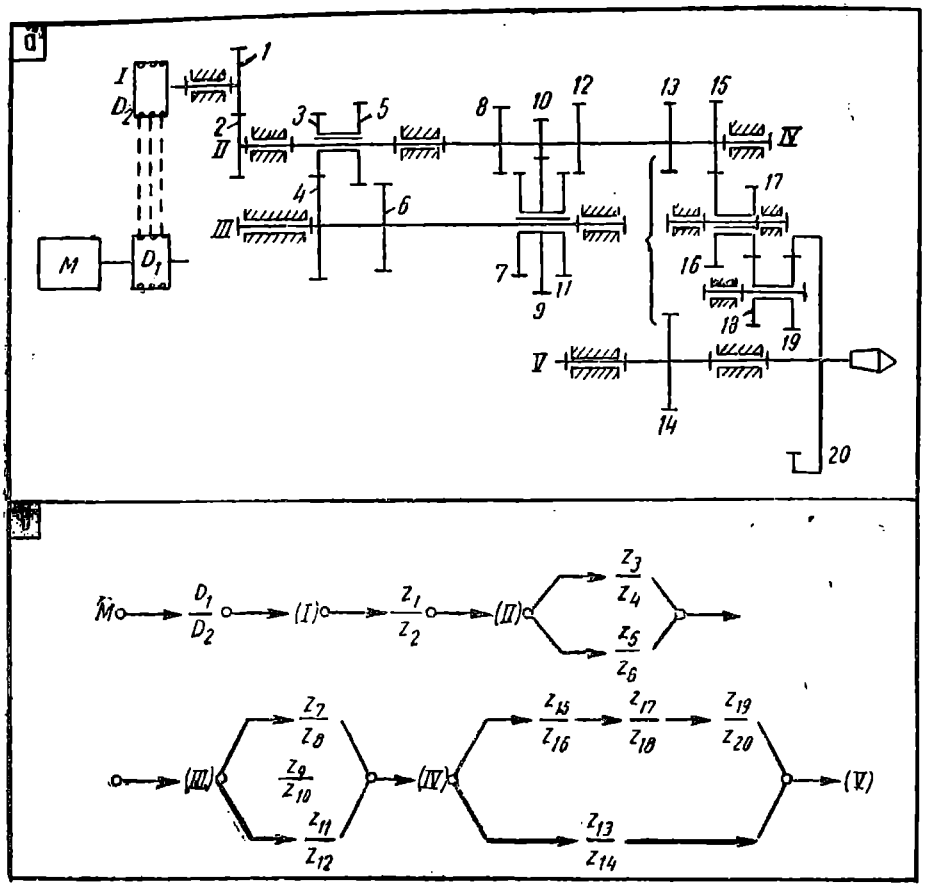


Fig. 10.13. Mecanismul cutiei de viteze a strungului greu LD 65-60:
a — schema cinematică; *b* — schema transmiterii mişcării de rotaţie de la motorul electric *M* la arborele principal *V*.

Exemplul 10.4. Să se determine cele 12 turaţii ale arborelui principal *V* la strungul greu *LD 65-60* cunoscînd schema cinematică a mecanismului cutiei de viteze (fig. 10.13, *a*), schema cinematică de transmitere a mişcării de rotaţie de la motorul electric *M* la arborele principal *V* (fig. 10.13, *b*), turaţia motorului electric n_m= =1 440 roţ/min, diametrele roţilor de transmitere D_1=203 mm, D_2=480 mm şi numerele de dinţi ale celor 20 de roţi (tab. 10.4).

TABELUL 10.4

Numărul de dinţi al roţilor strungului LD 65-60

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}
46	51	40	80	50	70	35	70	60	60	21	84	36
z_{14}	z_{15}	z_{16}	z_{17}	z_{18}	z_{19}	z_{20}						
72	36	48	28	56	23	138						

Rezolvare. Relaţiile aplicate şi rezultatele obţinute sînt indicate în tabelul 10.5.

TABELUL 10.5

Cutia de viteze a strungului greu LD 65-60
(relaţii de calcul şi valori numerice)

Indicativul turaţiei	Relaţii de calcul	Rezultate rot/min	Indicativul turaţiei	Relaţii de calcul	Rezultate rot/min
$n_{(1)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_{11} z_{15} z_{17} z_{18}}{D_2 z_2 z_4 z_{12} z_{16} z_{19} z_{20}}$	4,19	$n_{(7)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_{11} z_{13}}{D_2 z_2 z_7 z_{12} z_{11}}$	35,58
$n_{(2)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_{11} z_{15} z_{17} z_{19}}{D_2 z_2 z_6 z_{12} z_{16} z_{19} z_{20}}$	6	$n_{(8)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_{11} z_{13}}{D_2 z_2 z_7 z_{12} z_{14}}$	47,97
$n_{(3)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_7 z_{15} z_{17} z_{19}}{D_2 z_2 z_4 z_6 z_{16} z_{19} z_{20}}$	8,39	$n_{(9)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_7 z_{13}}{D_2 z_2 z_4 z_6 z_{14}}$	67,17
$n_{(4)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_5 z_7 z_{15} z_{17} z_{19}}{D_2 z_2 z_6 z_8 z_{16} z_{19} z_{20}}$	8,40	$n_{(10)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_5 z_7 z_{13}}{D_2 z_2 z_6 z_8 z_{14}}$	95,95
$n_{(5)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_9 z_{15} z_{17} z_{18}}{D_2 z_2 z_4 z_{10} z_{16} z_{19} z_{20}}$	16,79	$n_{(11)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_3 z_9 z_{13}}{D_2 z_8 z_{10} z_{11}}$	134,33
$n_{(6)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_5 z_9 z_{15} z_{19} z_{19}}{D_2 z_2 z_8 z_{10} z_{16} z_{19} z_{20}}$	23,98	$n_{(12)}$	$n_m \frac{D_1 z_1 z_1 z_3 z_{13}}{D_2 z_2 z_6 z_{10} z_{14}}$	191,91

10.6.4. TRENURI DE ROŢI DINŢATE CU ROŢI CONICE

Aceste trenuri pot fi montate în serie, paralel sau mixt. Calculul raportului de transmitere se face asemănător trenurilor cu roţi cilindrice.

Semnul raportului de transmitere *are sens* numai cînd roţile extreme (conducătoare şi condusă) au arborii *paraleli.* În această situaţie, pentru stabilirea semnului se utilizează *metoda săgeţilor concurente în polul angrenării,* raportul de transmitere fiind considerat pozitiv cînd sensul săgeţilor notate pe roţile extreme este acelaşi şi, respectiv, negativ în caz contrar. De exemplu, trenurile cu roţi dinţate reprezentate în figura 10.14, *a,* c, *e* au rapoartele de transmitere $i_{13}=-\frac{z_3}{z_1}$ (montaj serie — fig. 10.14, *a*); $i_{13}=-\frac{z_2}{z_1 z_2'}$ (montaj paralel — fig. 10.14, *c*); $i_{14}=\frac{z_2 z_4}{z_1 z_2'}$ (montaj mixt — fig. 10.14, *e*).

Din planele vitezelor unghiulare, trasate la scara $k\omega$ în figurile 10.14, *b, d, f,* în urma rezolvării ecuaţiilor vectoriale:

— pentru trenurile cu roţi conice montate în serie sau în paralel (fig. 10.14, *b, d*)

$$\frac{\overline{\omega_2}}{\|(\Delta_2)}=\frac{\overline{\omega_1}}{\|(\Delta_1)}+\frac{\overline{\omega_{21}}}{\|AS}$$

$\overline{\omega_2}=\overline{\omega_2'}$ (la montajul paralel)

$$\frac{\overline{\omega_3}}{\|(\Delta_3)}=\frac{\overline{\omega_2}}{\|(\Delta_2)}+\frac{\overline{\omega_{32}}}{\|BS}$$

— pentru trenul cu roţi conice montate mixt (fig. 10.14, *f*)

$$\frac{\overline{\omega_2}}{\|(\Delta_2)}=\frac{\overline{\omega_1}}{\|(\Delta_1)}+\frac{\overline{\omega_{21}}}{\|AS}$$

$\overline{\omega_2}=\overline{\omega_2'}$

$$\frac{\overline{\omega_3}}{\|(\Delta_3)}=\frac{\overline{\omega_2'}}{\|(\Delta_2)}+\frac{\overline{\omega_{32}}}{\|BS}$$

$$\frac{\overline{\omega_4}}{\|(\Delta_4)}=\frac{\overline{\omega_3}}{\|(\Delta_3)}+\frac{\overline{\omega_{43}}}{\|CS}$$

se obțin valorile: $\omega_2 = k_\omega\ (p_\omega 2)$, $\omega_3 = k_\omega\,(p_\omega 3)$, $\omega_{21} = k_\omega\,(12)$, $\omega_{32} = k_\omega\ (23)$, $\omega_4 = k_\omega\ \ (p_\omega 4)$,

$$\omega_{13} = k_\omega\,(34),\ i_{13} = \frac{(p_\omega 1)}{(p_\omega 3)}\ ,\ i_{14} = \frac{(p_\omega 1)}{(p_\omega 4)}.$$

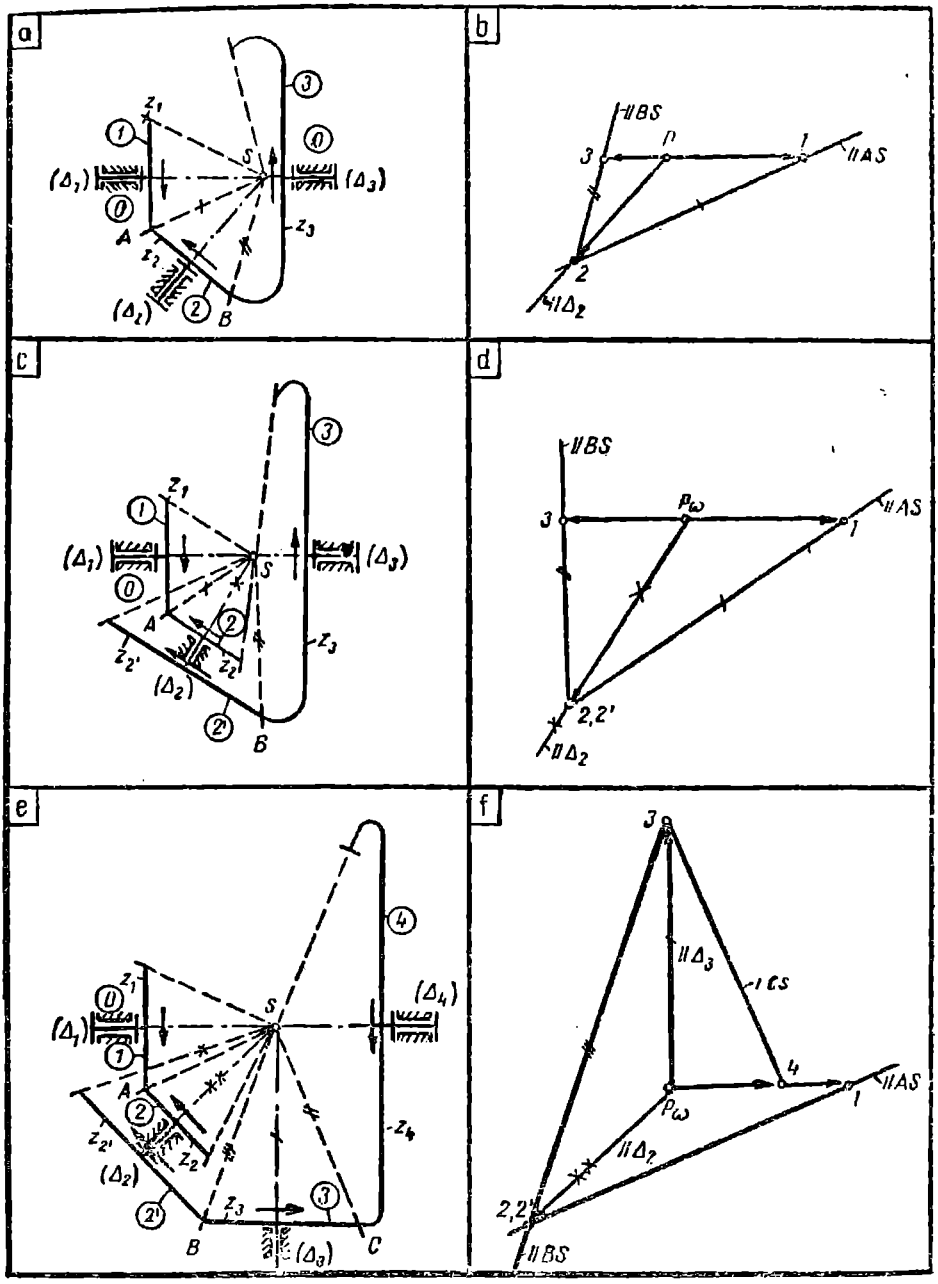


Fig. 10.14. Tren cu roți dințate conice montate în serie, paralel și mixt:
a, c, e — scheme cinematice; *b, d, f* — planele vitezelor unghiulare.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Ce se înțelege prin noțiunea de raport de transmitere?*
2. *Care sînt diferențele cinematice și constructive între un mecanism planetar diferențial și altul planetar simplu (indiferent de forma roților componente)?*
3. *Precizați caracteristica constructivă a mecanismelor cu roți dințate la care se aplică legea fundamentală a angrenării.*
4. *Formulați principiul de trasare a planelor de viteze liniare și unghiulare prin metoda grafoanalitică (Kutzbach) și relațiile dintre scări.*
5. *Demonstrați relațiile matematice ale raportului de transmitere i_{12} și vitezei unghiulare relative ω_{21} la angrenajele conice.*
6. *Determinați relația raportului de transmitere i_{12} la angrenajul șurub melc-roată melcată.*
7. *Comparați montajele roților și relațiile cu ajutorul cărora se calculează raportul de transmitere la trenurile cu roți dințate montate în serie, paralel și mixt și stabiliți elemcntele caracteristice fiecărui montaj.*
8. *Cînd are sens stabilirea semnului raportului de transmitere la trenurile cu roți dințate conice și cum se determină?*
9. *Să se determine grafic și analitic raportul de transmitere și viteza unghiulară a roții conduse la trenurile cu roți dințate din figura 10.15.*

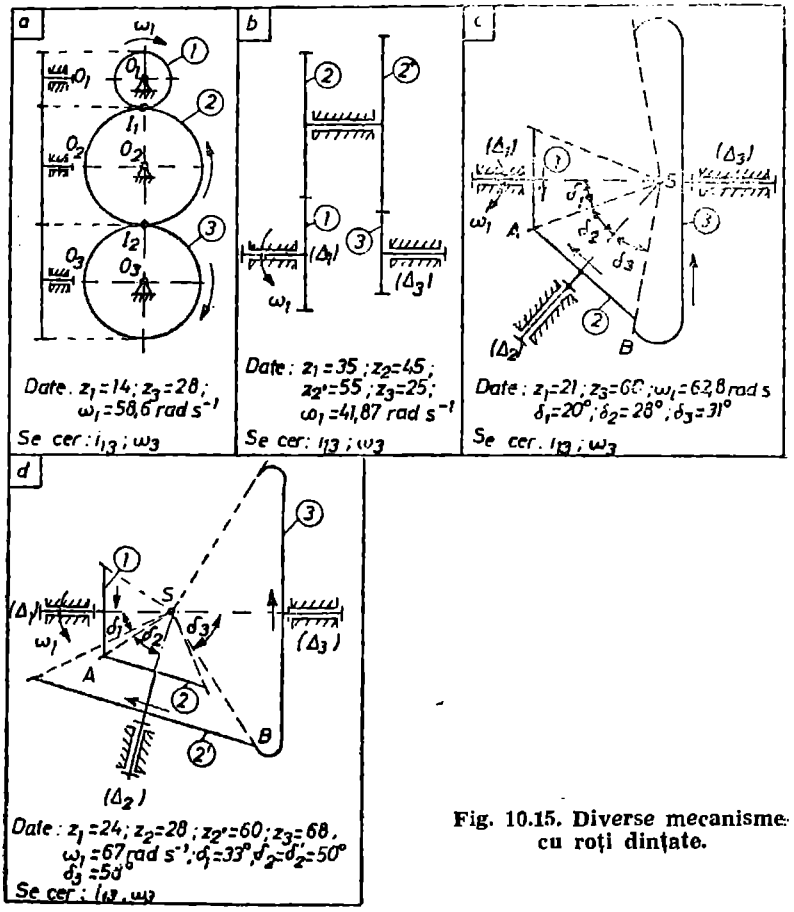

a
b
c
d
Date: $z_1=14$; $z_3=28$; $\omega_1=58,6$ rad s^{-1}
Se cer: i_{13}; ω_3
Date: $z_1=35$; $z_2=45$; $z_2'=55$; $z_3=25$; $\omega_1=41,87$ rad s^{-1}
Se cer: i_{13}; ω_3
Date: $z_1=21$; $z_3=60$; $\omega_1=62,8$ rad s; $\delta_1=20°$; $\delta_2=28°$; $\delta_3=31°$
Se cer. i_{13}; ω_3
Date: $z_1=24$; $z_2=28$; $z_2'=60$; $z_3=68$, $\omega_1=67$ rad s^{-1}; $\delta_1=33°$; $\delta_2=\delta_2'=50°$ $\delta_3=58°$
Se cer: i_{13}, ω_3

Fig. 10.15. Diverse mecanisme cu roți dințate.

PARTEA A PATRA

CINETOSTATICA MECANISMELOR PLANE CU BARE

Cinetostatica studiază *forţele* care acţionează asupra elementelor cinematice ale mecanismelor, presupunîndu-se cunoscută starea de mişcare a elementului conducător (motor). O asemenea ipoteză (acceptată şi în cazul analizei cinematice a mecanismelor) este simplificatoare, ea permiţînd numai un *studiu preliminar cinematic şi cinetostatic* deoarece starea de mişcare a mecanismului este rezultatul acţiunii unor forţe, iar unele din forţe (cum sînt cele de inerţie) sînt dependente de această stare de mişcare.

Scopul cinetostaticii îl constituie *determinarea forţelor* care solicită elementele cinematice, pentru a se stabili datele necesare calculului de rezistenţă al elementelor mecanismului.

11

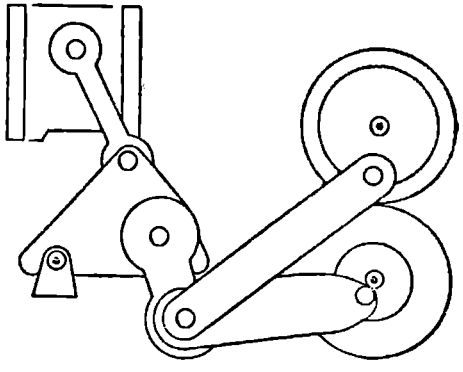
FORŢELE CARE ACŢIONEAZĂ ASUPRA ELEMENTELOR MECANISMULUI

11.1. CICLU ENERGETIC; CICLU CINEMATIC

În timpul funcţionării, asupra elementelor cinematice ale mecanismelor acţionează două categorii de forţe: *forţe exterioare* (cunoscute sau date) şi *forţe interioare* (reacţiunile din cuplele cinematice). Aceste forţe se studiază în timpul unui ciclu energetic.

Se numeşte *ciclu energetic* Φ_E perioada măsurată în timp sau unghi de rotaţie a elementului conducător al mecanismului, după care *forţele motoare revin la valorile iniţiale şi în continuare variaţia lor se repetă.*

Ciclul cinematic Φ_C reprezintă perioada măsurată în timp sau



unghi de rotație a elementului conducător al mecanismului, după care *distribuția de viteze și accelerații se repetă.*

Între cele două cicluri există relația:

$$\boxed{\Phi_E = k\Phi_C} \cdot \qquad (11.1)$$

unde k este un coeficient mai mare, egal sau mai mic decît unu ($k \leqslant 1$).

În tehnică se întîlnesc mașini la care:

— ciclul energetic corespunde cu cel cinematic (exemple: motorul monocilindric în doi timpi, pompele cu piston ș.a., la care $k=1$);

— ciclul energetic este un multiplu al ciclului cinematic (exemplu: motorul monocilindric în patru timpi, la care $k=2$);

— ciclul energetic este o fracțiune din ciclul cinematic (exemplu: motorul policilindric, la care $k<1$).

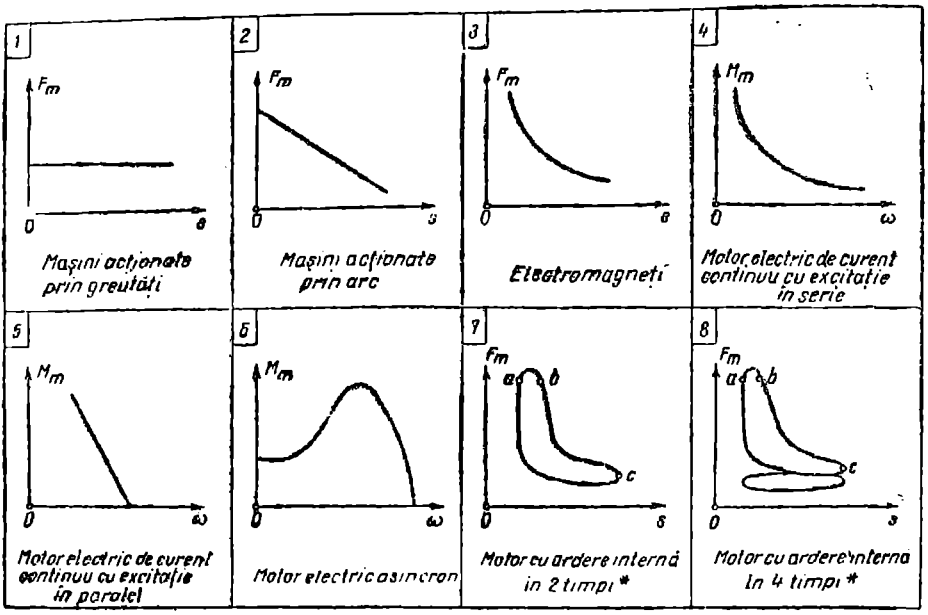
11.2. FORȚELE EXTERIOARE

Principalele forțe exterioare care solicită mecanismele sînt forțele sau cuplurile *motoare*, forțele sau cuplurile *rezistente*, forțele de *greutate* și forțele sau cuplurile de *inerție*. Forțele exterioare pot fi *constante* în timpul unui ciclu cinematic (exemple: sarcina de ridicat sau transportat la mașinile de ridicat și transportat, rezistența opusă la așchierea metalelor dacă secțiunea așchiei este constantă) sau *variabile* depinzînd fie de *poziția elementului* cinematic asupra căruia acționează (exemple: forța cu care gazele apasă pistonul la motoarele cu combustie internă, forța de apăsare sau întindere a unui arc elicoidal), fie de *viteza elementului* (exemple: cuplul motorului electric, forțele de frecare la suprafețele unse, rezistența aerului), fie de *timp* (exemple: concasoare, mori cu bilă), fie concomitent de mai mulți factori.

11.2.1. FORȚELE ȘI CUPLURILE MOTOARE

Forțele motoare $\overline{F}_M$ sau *cuplurile motoare* $\overline{M}_M$ sînt aplicate elementului *conducător* acționînd în *sensul mișcării*, ceea ce are ca urmare *accelerarea* mișcării mașinii. Ele produc, pe ansamblul ciclului energetic, un *lucru mecanic pozitiv* (exemple: forța exercitată de gazele de ardere în timpul detentei la motoarele cu ardere internă, cuplul motoarelor electrice). Lucrul mecanic este pozitiv atunci cînd unghiul dintre forța motoare și viteza punctului ei de aplicație sau dintre vectorii cuplu motor și viteza unghiulară a elementului este *ascuțit* ($\alpha<90°$). Se menționează că de-a lungul unui ciclu energetic, pe anumite porțiuni, lucrul mecanic poate fi negativ (exemplu: faza de compresie la motoarele cu ardere internă).

Datorită dependenței forțelor exterioare de o mulțime de factori, este foarte dificilă exprimarea matematică a legii lor de variație în timpul unui ciclu energetic. Din acest motiv se folosesc datele obținute de la mașini similare în condiții analoage de funcționare, prezentate sub forma unor diagrame numite caracteristici mecanice ale mașinii. Mașinile motoare pot avea caracteristici mecanice de diferite forme după specificul lor. În tabelul 11.1 se dau unele exemple de caracteristici mecanice.



* Forța este motoare numai în timpul detentei (abc)

11.2.2. FORȚELE ȘI CUPLURILE REZISTENTE

Forțele și cuplurile rezistente se aplică elementelor *conduse* acționînd în *sens contrar mișcării*, ceea ce are ca urmare *frînarea mișcării mașinii*. Ele produc pe ansamblul ciclului energetic un *lucru mecanic negativ*.

Din categoria forțelor rezistente fac parte forțele sau cuplurile de rezistență tehnologică și forțele de frecare.

Forțele de rezistență tehnologică $\overline{F}_R$ sau *cuplurile de rezistență* tehnologică M_R reprezintă forțele *utile* pentru învingerea cărora a fost construită mașina (exemple: forțele de așchiere la mașinile-unelte, forța de apăsare la o presă sau ștanță, forța cu care aerul apasă pistonul compresorului, forțele electromagnetice la generatoarele electrice, sarcina macaralelor). Pe ansamblul ciclului energetic aceste forțe produc un lucru mecanic negativ dar, de-a lungul ciclului, lucrul mecanic poate fi și pozitiv.

Forța de rezistență tehnologică este dată prin diagrame (caracteristici mecanice), iar în unele situații poate fi calculată (exemple: forța de așchiere la strung, forța periferică de frezare).

Forțele de frecare reprezintă componentele tangențiale ale reacțiunilor totale, care acționează asupra suprafețelor în contact ale cuplelor cinematice consumînd energie mecanică și producînd uzura suprafețelor. În orice moment al ciclului energetic, forțele de frecare realizează un lucru mecanic *negativ*. Se menționează că în tehnică există situații cînd forțele de frecare sînt *utile* (exemple: mecanisme cu roți de fricțiune, curele sau cabluri; frîne, cuplaje cu fricțiune). Într-o primă etapă a calculului cinetostatic aceste forțe de frecare se *neglijează*.

Forțele de greutate $\overline{G}$ sînt aplicate în centrele de greutate ale elementelor și orientate spre centrul pămîntului. Ele intervin în calculul cinetostatic numai în cazul mașinilor *lente* (mașini motoare cu turații reduse, mașini-unelte, laminoare, mașini de ridicat și transportat) putînd fi neglijate în cazul mașinilor *rapide* (motoare de vehicule terestre și spațiale) deoarece au valori mult inferioare forțelor de inerție.

Lucrul mecanic produs de greutate este *nul*, pe ansamblul ciclului cinematic deoarece traiectoria descrisă de centrul de greutate este, în general, o curbă închisă. În interiorul acestui ciclu, lucrul mecanic este diferit de zero, forțele de greutate putînd acționa ca forțe motoare pe porțiuni de coborîre sau ca forțe rezistente pe porțiuni de urcare (exemplu: greutatea berbecului la o presă mecanică este forță motoare în timpul căderii și forță rezistentă utilă în timpul ridicării).

11.2.4. FORȚELE ȘI CUPLURILE DE INERȚIE

Forțele de inerție $\overline{F}_i$ și cuplurile de inerție $\overline{M}_i$ reprezintă *reacțiunea cinetică a masei elementului la accelerația ce i se imprimă odată cu mișcarea sa*. Ele au valori importante la piesele mari cu mișcare foarte variată cărora le produc modificări regimului de solicitare mecanică. La mașinile lente (mașini grele de excavat, macarale grele, unele mașini agricole cu turație foarte redusă) efectul forțelor de inerție poate fi neglijat comparativ cu valorile mari ale forțelor motoare și rezistente.

11.3. FORȚELE INTERIOARE

Forțele interioare sînt constituite din *reacțiunile din cuplele cinematice*, care transmit eforturile de la un element la altul. Dacă se notează cu $\overline{R}_{12}$ (respectiv $\overline{M}_{12}$) reacțiunea elementului *1* asupra elementului *2* (fig. 11.1, *a*), relațiile fundamentale care se folosesc în calculul cinetostatic sînt:

$$\begin{matrix}\overline{R}_{12}+\overline{R}_{21}=\overline{0}\\ \overline{M}_{12}+\overline{M}_{21}=\overline{0}\end{matrix} \quad \text{sau} \quad \boxed{\begin{matrix}\overline{R}_{12}=-\overline{R}_{21}\\ \overline{M}_{12}=-\overline{M}_{21}\end{matrix}} \qquad (11.2)$$

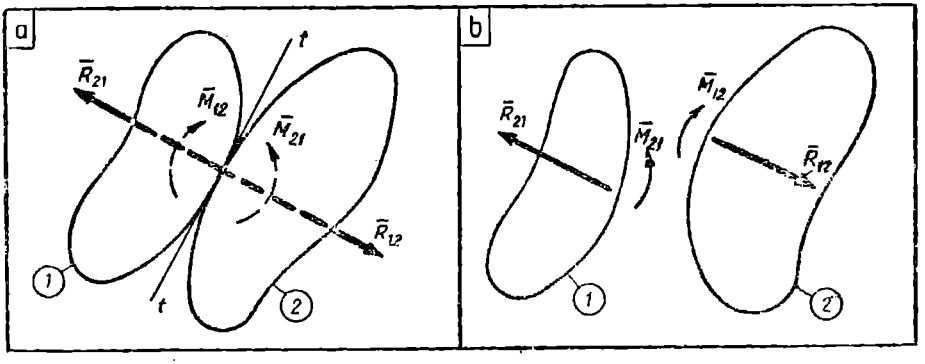


Fig. 11.1. Reacțiunile din cuplele cinematice:
a — principiul acțiunii și reacțiunii; *b* — modul în care acționează asupra unui element reacțiunile date de elementul îndepărtat.

Aceste relații exprimă matematic *principiul acțiunii și reacțiunii.*

Prin separarea elementelor, asupra fiecăruia va acționa *reacțiunea dată de elementul îndepărtat* (fig. 11.1, b).

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Indicați ce studiază cinetostatica mecanismelor.*
2. *Ce se înțelege prin ciclu energetic și ciclu cinematic? Exemple.*
3. *Care sînt principalele forțe exterioare ce solicită mcanismele?*
4. *Ce sînt forțele și cuplurile motoare, respectiv forțele și cuplurile rezistente?*
5. *Precizați noțiunea de caracteristică mecanică a mașinii. Exemple.*
6. *Definiți forțele și cuplurile de inerție.*
7. *Formulați noțiunea de forțe interioare.*

12

FORȚELE DE INERȚIE CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA ELEMENTELOR MECANISMELOR PLANE

Se consideră un element cinematic AB care execută o mișcare plană (fig. 12.1), avînd un plan de simetrie paralel cu planul mișcării.

Forțele de inerție care acționează asupra elementului pot fi reduse în raport cu centrul său de greutate G obținîndu-se *torsorul de reducere* τ^i_G compus dintr-o forță de inerție rezultantă $\overline{F}_{iG}$ aplicată în G și un cuplu rezultant $\overline{M}_{iG}$, ale căror valori se determină cu relațiile

$$\tau^i_G \begin{cases} \overline{F}_{iG} = -m\overline{a}_G & [\text{N}] \\ \overline{M}_{iG} = -I_G\overline{\varepsilon} & [\text{N.m}] \end{cases} \qquad (12.1)$$

în care:

m este masa elementului [kg];

$\overline{a}_G$ — accelerația centrului de greutate al elementului [ms^{-2}];

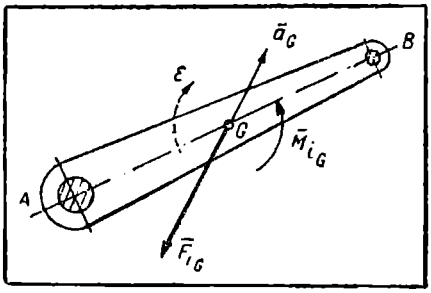


Fig. 12.1. Torsorul forțelor de inerție la un element cinematic aflat în mișcare plană.

I_G — momentul de inerție masic al elementului în raport cu axa perpendiculară pe planul mișcării ce trece prin centrul său de greutate [$kg \cdot m^2$];

ε — accelerația unghiulară a elementului [$rad \cdot s^{-2}$].

Semnul minus din aceste relații este convențional și indică faptul că forța de inerție rezultantă $\overline{F}_{iG}$ este de sens contrar accelerației $\overline{a}_G$, respectiv că sensul cuplajului rezultant $\overline{M}_{iG}$ este contrar accelerației unghiulare ε

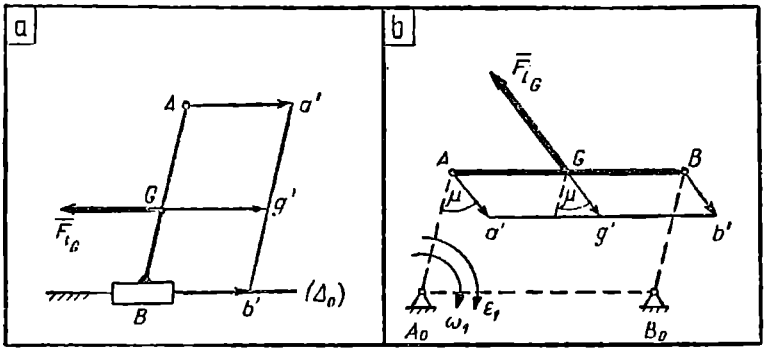


Fig. 12.2. Torsorul forţelor de inerţie la elementele cinematice în mişcare de translaţie:
a — rectilinie; b — circulară.

a elementului. Cele două componente ale torsorului $\overline{F}_{iG}$, $\overline{M}_{iG}$ se calculează cu uşurinţă dacă au fost determinate acceleraţiile $\bar{a}_G$ şi $\bar{\varepsilon}$ cu ajutorul *planului acceleraţiilor*. Relaţiile (12.1) capătă valori particulare pentru diferite cazuri concrete ale mişcării plane, analizate în cele ce urmează.

12.1. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIŞCARE DE TRANSLAŢIE (EXEMPLE: PISTOANE CAPETE DE CRUCE, CUŢITUL SECERĂTORII, MASA RABOTEZEI) — figura 12, 2, a

Aplicînd formulele 12.1 rezultă torsorul de reducere

$$\tau^i_G \begin{cases} \overline{F}_{iG} = -m\bar{a}_G \\ \overline{M}_{iG} = \overline{0} \end{cases}$$ (deoarece la mişcarea de translaţie $\bar{\varepsilon} = \overline{0}$).

Acelaşi torsor se obţine şi în cazul cînd elementul cinematic AB se află în mişcare de translaţie circulară (fig. 12.2,*b*).

12.2. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE (EXEMPLE: MANIVELE, BALANSIERE, ROŢI DE CUREA, ROŢI DINŢATE, VOLANŢI)

Mişcare de rotaţie uniformă
În jurul unei axe ce nu trece prin centrul de greutate al elementului (fig. 12.3, *a*)

Deoarece acceleraţia centripetă a centrului de greutate G este dirijată spre centrul de rotaţie ($a_G \equiv a^n_G = \omega^2 A_0 G \,||\, \overrightarrow{GA_0}$), iar acceleraţia unghiulară este nulă ($\varepsilon = 0$), torsorul forţelor de inerţie are o singură componentă; forţa de inerţie rezultantă F_{iG}:

$$\tau^i_G \begin{cases} \overline{F}_{iG} = -m\bar{a}_G \,||\, \overrightarrow{A_0A} \\ \overline{M}_{iG} = \overline{0} \end{cases}$$

Mişcare de rotaţie uniformă
În jurul unei axe ce nu trece prin centrul de greutate al elementului (fig. 12.4, *a*)

Acceleraţia liniară a centrului de greutate G, de modul $a_G = A_0G\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}$, este orientată spre interiorul concavităţii curbei formînd unghiul $\mu = \text{arc tg}\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}$ cu raza vectoare A_0A. Torsorul forţelor de inerţie are ambele componente ($\overline{F}_{iG}$, $\overline{M}_{iG}$):

$$\tau^i_G \begin{cases} \overline{F}_{iG} = -m\bar{a}_G \\ \overline{M}_{iG} = -I_G\bar{\varepsilon} \end{cases}$$

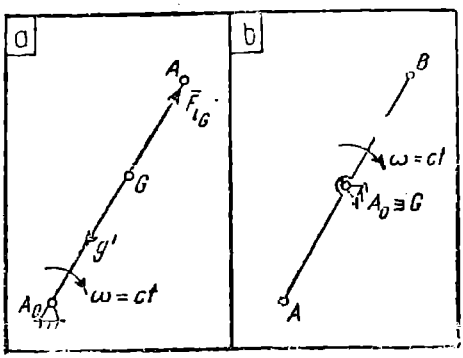


Fig. 12.3. Torsorul forțelor de inerție la elementul cinematic în mișcare de rotație uniformă:

a — mișcare de rotație în jurul unei axe ce nu trece prin centrul de greutate al elementului; *b* — mișcare de rotație în jurul unei axe ce trece prin centrul de greutate al elementului.

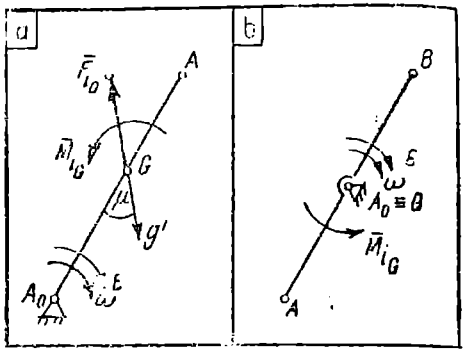


Fig. 12.4. Torsorul forțelor de inerție la elementul cinematic în mișcare de rotație neuniformă:

a — mișcare în jurul unei axe ce nu trece prin centrul de greutate al elementului; *b* — mișcare în jurul unei axe ce trece prin centrul de greutate al elementului.

În jurul unei axe ce trece prin centrul de greutate al elementului (fig. 12.3, *b*)

Întrucît $\bar{a}_G = \bar{0}$, $\varepsilon = \bar{0}$, torsorul forțelor de inerție este nul ($\tau^i_G = 0$). Acesta este cazul *elementelor echilibrate* care prezintă avantajul că forțele de inerție nu dau reacțiuni suplimentare în cuple (articulații).

În jurul unei axe ce trece prin centrul de greutate al elementului (fig. 12.4, *b*)

Observînd că $\bar{a}_G = \bar{0}$, torsorul forțelor de inerție are o singură componentă $\bar{M}_{IG}$

$$\tau^i_G \left\{ \begin{array}{l} \bar{F}_{IG} = \bar{0} \\ \bar{M}_{IG} = -I_G \bar{\varepsilon}. \end{array} \right.$$

12.3. ELEMENT CINEMATIC ÎN MIȘCARE PLANĂ DE ROTOTRANSLAȚIE (EXEMPLU: BIELE) — figura 12.5

Pentru determinarea torsorului de inerție se presupune că, în prealabil, s-a determinat distribuția de accelerații (fig. 12.5, *b*):

1) $$\frac{\bar{a}_B}{\| \Delta B} = \frac{\bar{a}_A}{\| AB} + \frac{\bar{a}^n_{BA}}{\| AB} + \frac{\bar{a}^t_{BA}}{\perp AB}$$

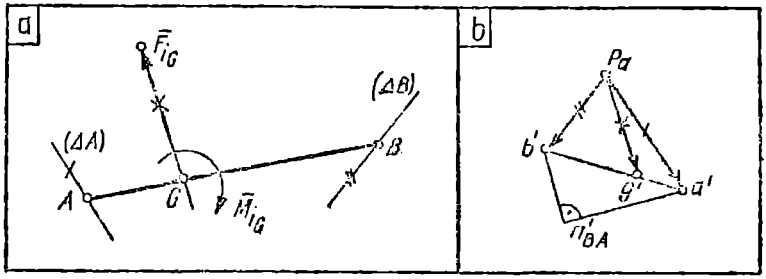


Fig. 12.5. Element cinematic în mișcare plană de rototranslație:

a — torsorul forțelor de inerție; *b* — planul accelerațiilor.

2) $\bar{a}_G$ — prin asemănare: $\frac{(a'g')}{AG}=\frac{(a'b')}{AB}\Rightarrow\bar{a}_G=k_a\overline{(p_ag')}$;

3) $\varepsilon=\frac{a^t_{BA}}{AB}=\frac{k_a(n_{BA}b')}{AB}$ ↶.

Fiind cunoscute mărimile $\bar{a}_G$ și $\bar{\varepsilon}$, torsorul forțelor de inerție va fi

$$\tau^i_G\left\{\begin{array}{l}\bar{F}_{iG}=-m\bar{a}_G\\ \bar{M}_{iG}=-I_G\bar{\varepsilon}.\end{array}\right.$$

Exemplul 12.1. Să se determine torsorii forțelor de inerție pentru fiecare element component (1, 2, 3) ale mecanismului manivelă-piston în poziția reprezentată în figura 12.6. Se cunosc: dimensiunile elementelor A_0A, AB, viteza unghiulară $\omega_1=\text{const.}$, unghiul de rotație φ_1 al manivelei, greutățile elementelor G_1, G_2, G_3 și pozițiile centrelor lor de greutate $G_1\equiv A_0$, G_2, $G_3\equiv B$, precum și momentele de inerție masice ale elementelor I_{G1}, I_{G2}, I_{G3}.

Rezolvare.

— Se construiește mecanismul la scara lungimilor k_l.

— Se trasează direct pe mecanism planul vitezelor rotit cu 90° și planul accelerațiilor rotit cu 180°, rezultînd: $\overline{v_B}=k'_v\overline{(p_vb)}$; $\overline{v_{BA}}=k'_v\overline{(ab)}$; $\omega_2=\frac{v_{BA}}{AB}$ (sens trigonometric), $\overleftarrow{a_B}=k'_a\overline{(p_ab')}\equiv\overleftarrow{a_{G3}}$; $\overleftarrow{a_{G2}}=k_a\overline{(p_ag'_2)}$; $\varepsilon_2=a^t_{BA}/AB$ (sens trigonometric).

— Se calculează torsorii forțelor de inerție reduse în raport cu centrele de greutate respective.

$$\tau^i_{G_1}=0;\quad \tau^i_{G_2}\left\{\begin{array}{l}F_{iG2}=m_2a_{G2}=\frac{G_2}{g}\,k'_a(p_ag'_2)\,||\,(p_3g'_2)\\ M_{iG2}=I_{G2}\varepsilon_2=I_{G2}\,\frac{k'_a(n'_{BA}b')}{AB}\ \text{(sens orar)}\end{array}\right.$$

$$\tau'_{G_3}\left\{\begin{array}{l}F_{iG3}=m_3a_{G3}=\frac{G_2}{g}\,k_a(p_ab')\,||\,(p_ab')\\ M_{iG3}=0\end{array}\right.$$

— Se transpun pe desen torsorii forțelor de inerție pe fiecare element în parte.

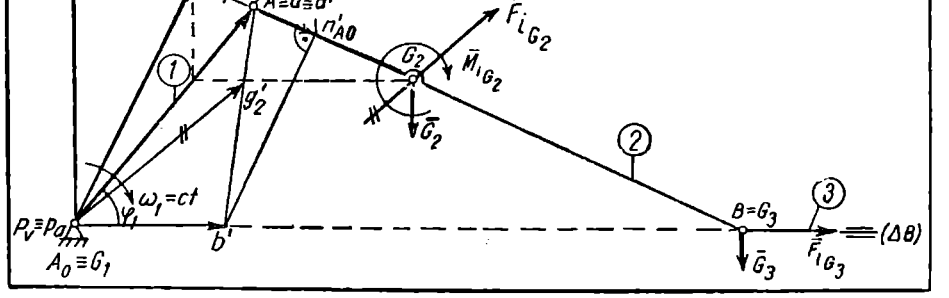


Fig. 12.6. Torsorii forțelor de inerție ale elementelor mecanismului manivelă-piston.

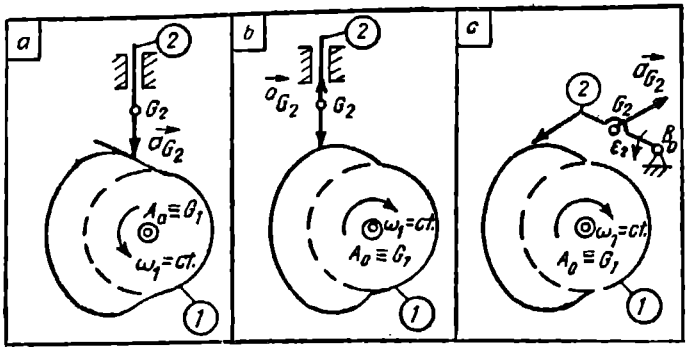


Fig. 12.7. Mecanisme cu came:
a — tachet plan translant; *b* — tachet translant dezaxat cu vîrf; *c* — tachet oscilant cu vîrf.

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Indicați relațiile de calcul ale torsorului forțelor de inerție reduse în raport cu centrul de greutate al unui element cinematic care execută o mișcare plană.*
2. *Formulați relațiile torsorului forțelor de inerție pentru elementele cinematice aflate în mișcare de translație și de rotație.*
3. *Indicați pentru schemele cinematice ale mecanismelor din figura 12.7, torsorii forțelor de inerție ale elementelor cinematice componente, reduse în raport cu centrele lor de greutate.*

13

STUDIUL REACȚIUNILOR DIN CUPLELE CINEMATICE ALE MECANISMELOR PLANE

13.1. REACȚIUNILE DIN CUPLELE CINEMATICE ALE MECANISMELOR PLANE

Mecanismele plane au în componența lor numai cuple de clasa a *IV*-a și a *V*-a, în care se produc *reacțiuni* în timpul funcționării. În prima fază a calculului cinetostatic se stabilește *numărul necunoscutelor* introduse de aceste reacțiuni, *neglijînd* frecarea din cuple.

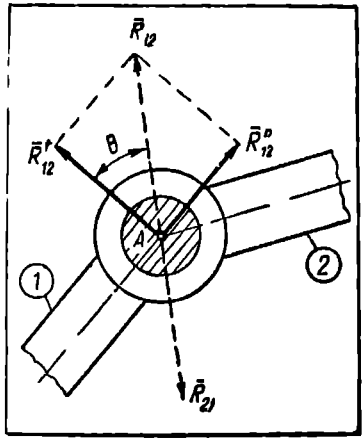


Fig. 13.1. Reacțiunea din cupla de clasa a *V*-a de rotație.

CUPLA DE CLASA A V-A DE ROTAȚIE
figura 13.1.

Cupla de rotație transmite forțele, între elementele *1* și *2* pe care le leagă, prin presiuni radiale. Întrucît rezultanta $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$ a acestor presiuni trece prin centrul articulației, punctul ei de aplicație

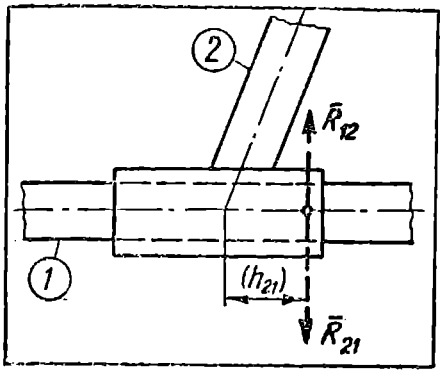


Fig. 13.2. Reacţiunea din cupla de clasa a *V*-a de translaţie.

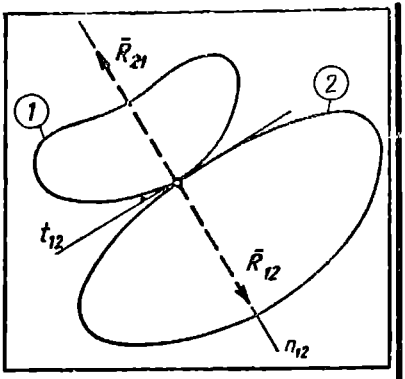


Fig. 13.3. Reacţiunea din cupla de clasa a *IV*-a.

este cunoscut. Rezultă că necunoscutele ce urmează a fi determinate sînt mărimea reacţiunii $\bar{R}_{12}$ şi *direcţia-sensul* acesteia date de unghiul θ. Se obişnuieşte ca reacţiunea $\bar{R}_{12}$ să se descompună într-o componentă după direcţia elementului ($\bar{R}^n_{12}$) numită *reacţiune normală* şi o componentă perpendiculară pe axa elementului ($\bar{R}^t_{12}$) numită *reacţiune tangenţială*. Prin urmare, o cuplă de clasa a *V*-a de rotaţie introduce *două necunoscute* în calculul cinetostatic.

Observaţie. Reacţiunea dintre cele două elemente *1* şi *2* se notează cu indicii respectivi, *primul indicînd numărul elementului care exercită reacţiunea, iar al doilea numărul elementului asupra căruia acţionează reacţiunea.*

13.1.2. CUPLA DE CLASA A *V*-A DE TRANSLAŢIE — figura 13.2

Această cuplă transmite forţele, de la elementul *1* la elementul *2*, prin presiuni perpendiculare pe suprafaţa de contact distribuite oricum în funcţie de direcţia forţelor de transmis. Rezultanta acestor presiuni este reacţiunea $\bar{R}_{12}=-\bar{R}_{21}$ care va fi, de asemenea, perpendiculară pe direcţia deplasării. În acest caz necunoscutele introduse de o cuplă de clasa a *V*-a de translaţie sînt în număr de *două*: mărimea reacţiunii şi poziţia punctului ei de aplicaţie (distanţa h_{21}).

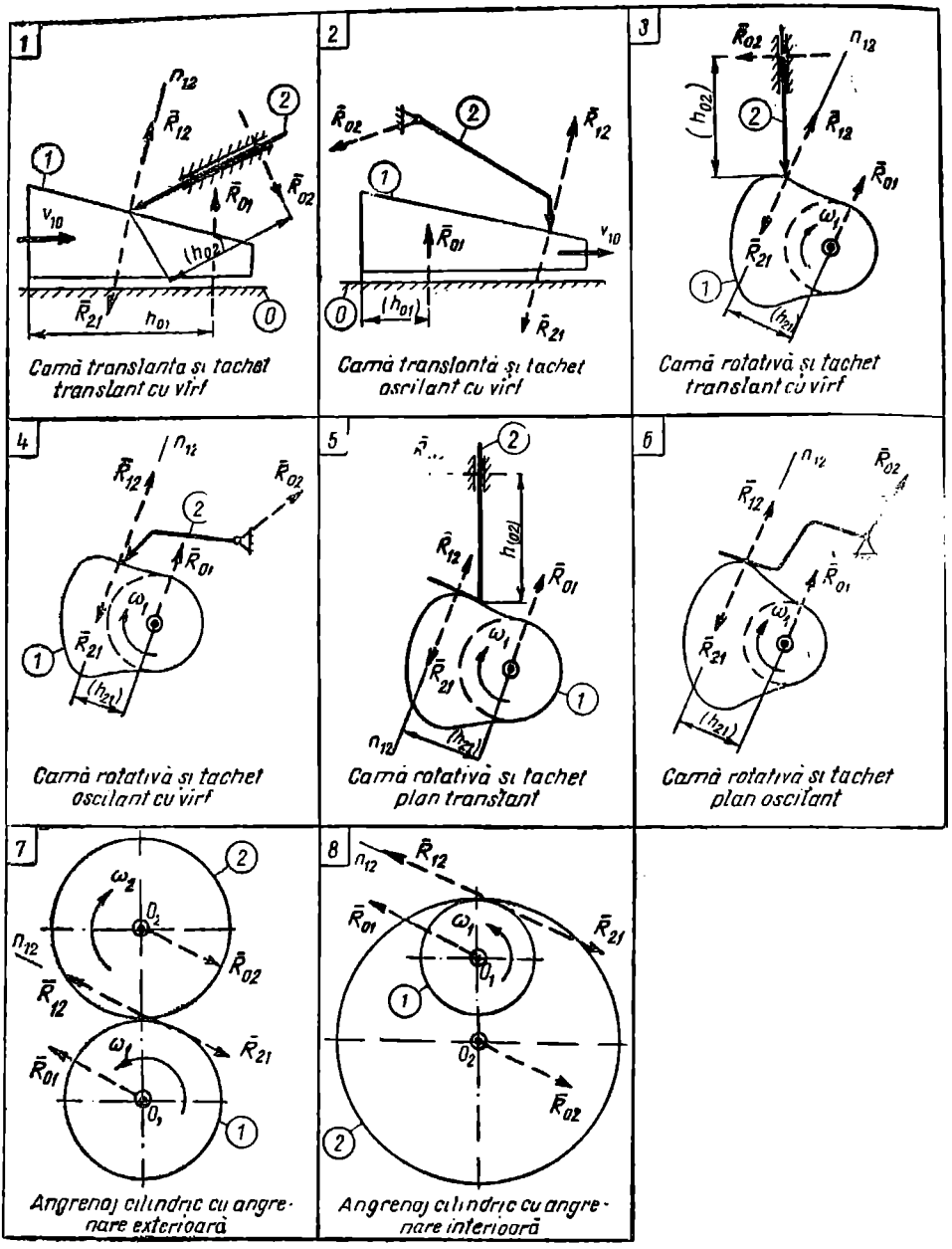
13.1.3. CUPLA DE CLASA A *IV*-A — figura 13.3

Cupla interioară de clasa a *IV*-a introduce o reacţiune $\bar{R}_{12}=-\bar{R}_{21}$ avînd direcţia normalei comune n_{12} la cele două curbe care formează cupla superioară. Întrucît punctul de aplicaţie al reacţiunii coincide cu punctul de contact, rezultă că o cuplă de clasa a *IV*-a introduce o *singură necunoscută:* mărimea ei.

În tabelul 13.1 sînt date cîteva exemple de cuple de clasa a *IV*-a şi a *V*-a cu reacţiunile corespunzătoare.

13.2. HODOGRAFUL REACŢIUNILOR

Prin hodograful reacţiunilor se înţelege *locul geometric al vîrfurilor vectorului reacţiune.* Acest loc geometric se determină cu ajutorul *poligonului forţelor* şi dă o imagine clară a variaţiei direcţiilor reacţiunii din



cuplă în raport cu un element dat. Hodograful reacțiunilor servește unui dublu scop:

— pentru *amplasarea orificiilor de ungere* în zona în care valoarea reacțiunii este *minimă sau nulă*;

— pentru *dimensionarea elementelor cinematice* pe baza valorii *maxime* a reacțiunii.

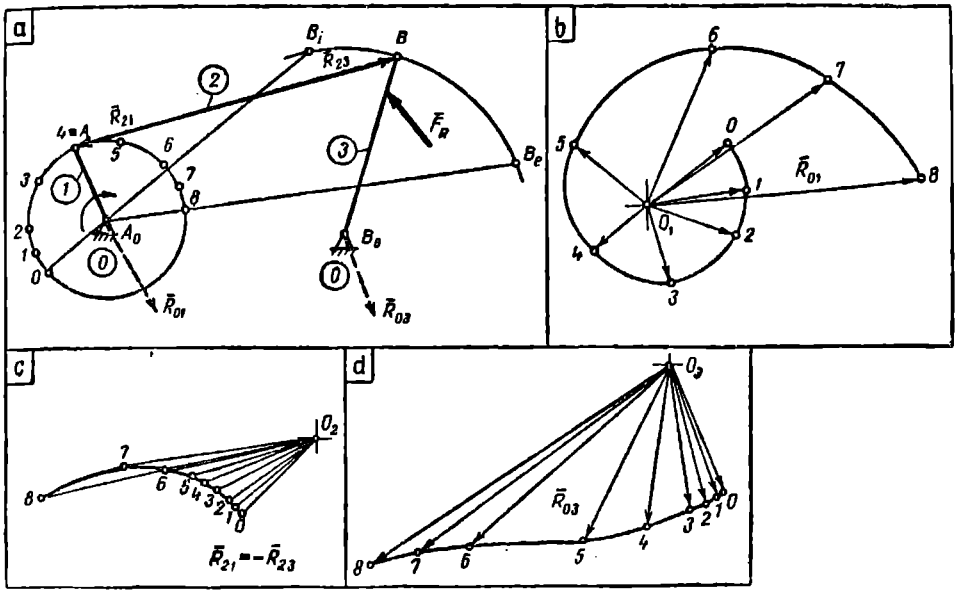


Fig. 13.4. Hodograful reacţiunilor la mecanismul patrulater:

a — schema cinematică; *b* — hodograful reacţiunii $\bar{R}_{01}$; *c* — hodograful reacţiunii $\bar{R}_{21}=-\bar{R}_{23}$; *d* — hodograful reacţiunii $\bar{R}_{03}$.

Se prezintă spre exemplificare forma hodografelor obţinute pentru reacţiunile $\bar{R}_{01}$, $\bar{R}_{21}=-\bar{R}_{23}$ şi $\bar{R}_{03}$ la un mecanism patrulater (fig. 13.4), determinate pentru opt poziţii ale cursei active cuprinse între cele două poziţii extreme B_i, B_e ale elementului condus B_0B, forţa rezistentă $\bar{F}_R$ fiind presupusă constantă.

Reacţiunile $\bar{R}_{21}$ şi $\bar{R}_{23}$ sînt egale şi de sens contrar deoarece elementul *2* nu este solicitat de forţe exterioare.

13.3. GENERALITĂŢI PRIVIND CALCULUL CINETOSTATIC

În prima etapă a calculului *se adoptă dimensiunile aproximative ale elementelor cinematice* (de regulă după construcţii similare existente), *se efectuează calculul cinetostatic* şi cu valorile maxime ale forţelor determinate *se verifică tensiunile maxime efective* produse în secţiunile periculoase ale pieselor. Dacă aceste tensiuni efective rezultă mai mari decît tensiunile admisibile ale materialelor din care se execută elementele cinematice, se trece la o nouă dimensionare a acestora şi cu noile dimensiuni se reface întregul calcul cinetostatic. Acest algoritm de calcul se repetă de atîtea ori pînă cînd este îndeplinită condiţia ca tensiunile efective maxime produse în elementele cinematice să fie mai mici decît cele admisibile, iar deformaţiile să se încadreze între limite prescrise.

Reacțiunile din cuplele cinematice se determină utilizînd *metoda echilibrului cinetostatic* aplicată fiecăreia din grupele structurale care compun mecanismul, întrucît acestea constituie *sisteme static determinate*. Pentru a demonstra această proprietate a grupelor structurale se face următorul raționament deductiv:

— în plan, pentru un element cinematic se pot scrie trei ecuații de echilibru; deci pentru un lanț cinematic format din n elemente se scriu în total $E=3n$ ecuații de echilibru;

— o cuplă de clasa a V-a introduce două necunoscute și o cuplă de clasa a IV-a o necunoscută; drept consecință, numărul total de necunoscute introduse de cuplele cinematice ale mecanismului este:

$$N=2c_5+c_4;$$

— condiția ca lanțul cinematic să fie static determinat este ca numărul ecuațiilor E să fie egal cu numărul necunoscutelor N:

$$3n=2c_5+c_4 \text{ sau } 3n-2c_5-c_4=0, \text{ adică } M_3=0.$$

Prin urmare, condiția ca un lanț cinematic să fie static determinat este ca *gradul lui de mobilitate să fie nul*. Or, lanțurile cinematice cu grad de mobilitate nul fiind tocmai grupele structurale (Assur), rezultă că *studiul cinetostatic al mecanismelor trebuie efectuat pe grupe structurale*.

Dacă se aplică relația $3n-2c_5-c_4=1$ unui mecanism plan avînd gradul de mobilitate $M_3=1$, se obține expresia $3n=2c_5+c_4+1$, adică numărul ecuațiilor de echilibru static permite să se găsească, alături de reacțiunile din cuplele cinematice, *încă o necunoscută* care poate fi *o forță* sau *un cuplu*, ce menține mecanismul în echilibru, numite *forță de echilibrare* $\overline{F}_e$ sau *cuplu de echilibrare* $\overline{M}_e$.

Metoda echilibrului cinetostatic (sau metoda echilibrului dinamic fictiv) cu ajutorul căreia se determină reacțiunile din cuple se bazează pe *principiul lui d'Alembert* conform căruia *„un punct material, un solid rigid sau un sistem de solide rigide se află în echilibru fictiv dinamic, sub acțiunea forțelor și cuplurilor exterioare și de inerție"*.

Prin aplicarea metodei echilibrului cinetostatic, problema de dinamică a mecanismului se transformă într-o problemă de statică. Aceasta constă în scrierea și rezolvarea ecuațiilor de echilibru. Algoritmul de calcul este următorul:

— se efectuează *analiza structurală* a mecanismului cu scopul cunoașterii clasei și ordinului mecanismului pe baza grupelor structurale componente. În acest cadru se precizează elementul cinematic final asupra căruia se va aplica forța (sau cuplul) de echilibrare;

— se stabilesc *forțele exterioare* care acționează asupra mecanismului (forțe sau cupluri motoare, forțe sau cupluri de rezistență tehnologică, forțe de greutate, forțe și cupluri de inerție);

— se trece la *calculul cinetostatic* (adică la determinarea reacțiunilor din cuple) *începînd cu grupa structurală din care face parte elementul asupra căruia acționează forța exterioară cunoscută* (forța motoare sau forța de rezistență tehnologică). După ce s-au stabilit valorile reacțiunilor acestei grupe se trece la *grupa următoare* considerînd, printre forțele exterioare pentru această grupă și *forțele de legătură* (reacțiunile) cu grupa anterior studiată. Calculul este continuat în această modalitate din grupă în grupă pînă se ajunge la *elementul cinematic final* asupra că-

ruia acționează forța de echilibrare necunoscută care poate fi forță *motoare* sau forță de *rezistență tehnologică*, după caz. Astfel, forța de echilibrare este forță *motoare* atunci cînd calculul cinetostatic pornește de la grupa structurală asupra căreia acționează *forța de rezistență tehnologică* dată (exemplu: mașini-unelte) sau forță de rezistență tehnologică atunci cînd calculul cinetostatic începe de la grupa structurală asupra căreia acționează forța motoare cunoscută (exemplu: motoarele cu ardere internă).

Calculul reacțiunilor din cuplele cinematice se bazează pe următoarele observații:

— orice *grupă structurală* este un lanț cinematic static determinat și deci i se pot *aplica ecuațiile de echilibru static;*

— fiecare *element cinematic* component al unei grupe structurale aflate în echilibru se va găsi, la rîndul lui, în echilibru și ca atare *i se pot aplica ecuațiile de echilibru static.*

Prin urmare, calculul cinetostatic va consta din *rezolvarea ecuațiilor scalare de echilibru a momentelor* și a *ecuațiilor vectoriale de echilibru a forțelor*, scrise pentru elemente cinematice *izolate, părți* din grupa structurală sau *întreaga grupă*. Acest calcul se efectuează pe cale *analitică* (pentru ecuațiile scalare de echilibru ale momentelor) și pe cale *grafo-analitică* (pentru ecuațiile vectoriale de echilibru ale forțelor). Cazul din urmă se reduce la construirea poligonului forțelor la scara forțelor arbitrar aleasă $k_F \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right]$.

Ca exemplu se redă mai jos calculul cinetostatic al unei diade care se află în cele mai numeroase mecanisme.

13.4. CINETOSTATICA DIADEI DE ASPECTUL 2 (*RRT*)

Se presupune diada (2, 3) de aspectul 2 (*RRT*), reprezentată grafic la scara lungimilor k_l, extrasă dintr-un mecanism unde era legată la elementele *1* și respectiv *4* (fig. 13.5, *a*).

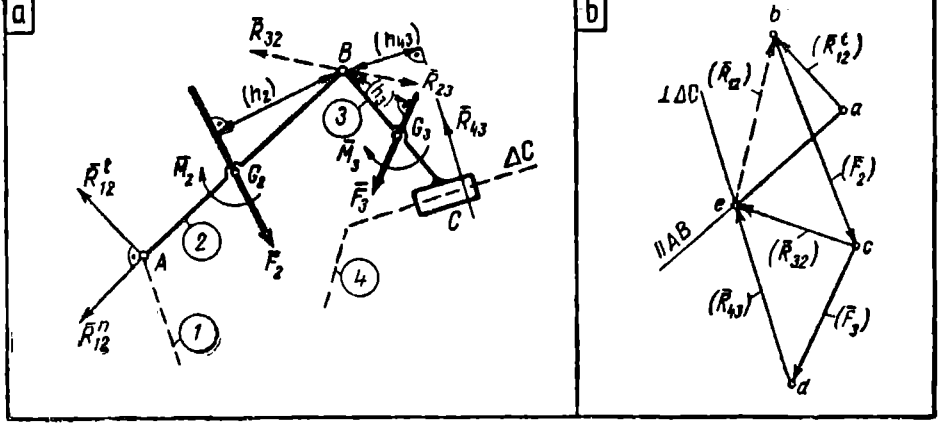


Fig. 13.5. Cinetostatica diadei de aspectul 2 (*RRT*):
a — schema forțelor și a cuplurilor; *b* — poligonul forțelor.

În centrele de greutate (G_2, G_3) ale elementelor 2 și 3 se aplică torsorii de reducere ai tuturor forțelor exterioare (inclusiv cele de inerție) $\tau(\overline{F}_2, \overline{M}_2)$ și $\tau_3(\overline{F}_3, \overline{M}_3)$. Reacțiunea din cupla exterioară de rotație A se descompune în componentele $\overline{R}^n_{12}$ și $\overline{R}^t_{12}$ iar reacțiunea din cupla exterioară de translație C se trasează perpendicular pe direcția ghidajului ΔC la o distanță necunoscută (h_{43}) față de cupla interioară B. Reacțiunea interioară $\overline{R}_{23}=-\overline{R}_{32}$ nu se descompune. Necunoscutele problemei sînt: $\overline{R}^n_{12}$, $\overline{R}^t_{12}$, $\overline{R}_{43}$, (h'_{43}), $\overline{R}_{23}=-\overline{R}_{32}$.

Calculul componentei tangențiale R^t_{12}

$$[\sum M^{(2)}_B=0]:$$

$$-R^t_{12}\ k_l(AB)+F_2k_l(h_2)-M_2=0\Rightarrow R_{12}=\frac{1}{(AB)}\left[F_2(h_2)-\frac{M_2}{k_l}\right].$$

Dacă reacțiunea R^t_{12} rezultă negativă înseamnă că în realitate are sens contrar celui ales inițial.

Calculul componentei normale $\overline{R}^n_{12}$ și al reacțiunilor $\overline{R}_{43}$, $\overline{R}_{12}$

$$[\sum \overline{F}^{(2.3)}_j=\overline{0}]:$$

$$\frac{\overline{R}^n_{12}}{\|AB}+\frac{\overline{R}^t_{12}}{(ab)}+\frac{\overline{F}_2}{(bc)}+\frac{\overline{F}_3}{(cd)}+\frac{\overline{R}_{43}}{\perp\Delta C}=\overline{0}.$$

Din poligonul forțelor, reprezentat la scara forțelor $k_F\left[\frac{\text{N}}{\text{mm}}\right]$ în figura 13.5, *b*, rezultă $\overline{R}^n_{21}=k_F(\overline{ca})$, $\overline{R}_{43}=k_F(\overline{de})$, $R_{12}=k_F(\overline{eb})$.

Calculul distanței (h_{43})

$$[\sum M^{(3)}_B=0]:$$

$$R_{42}k_l(h_{43})-F_3k_l(h_3)-M_3=0\Rightarrow(h_{43})=\frac{1}{R_{43}}\left[F_3(h_3)+\frac{M_3}{k_l}\right].$$

Dacă valoarea lui (h_{43}) rezultă negativă înseamnă că suportul reacțiunii R_{43} este de cealaltă parte a articulației B.

Calculul reacțiunii $\overline{R}_{32}$ din cupla cinematică interioară B

$$[\sum \overline{F}^{(2)}_j=\overline{0}]:$$

$$\frac{\overline{R}^n_{12}}{(ea)}+\frac{\overline{R}^t_{12}}{(ab)}+\frac{\overline{F}_2}{(bc)}+\overline{R}_{32}=\overline{0}\Rightarrow\overline{R}_{32}=k_F(\overline{ce}).$$

Ca verificare $[\sum \overline{F}_j^{(s)} = \overline{0}]$:

$$\underbrace{\overline{F}_3}_{(cd)} + \underbrace{\overline{R}_{43}}_{(de)} + \overline{R}_{23} = \overline{0} \Rightarrow \overline{R}_{23} = k_F(\overline{ec}) = -\overline{R}_{32}.$$

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Precizați, pentru cuplele de clasa a V-a și a IV-a, în ipoteza neglijării frecării elementelor cunoscute și necunoscute ale reacțiunilor.*
2. *Formulați noțiunea de „hodograf al reacțiunilor" și indicați scopul pentru care se determină.*
3. *În ce constă calculul cinetostatic?*
4. *Efectuați calculul componentelor tangențiale $\overline{R}_{12}^t$ și normale $\overline{R}_{12}^n$, al reacțiunilor $\overline{R}_{43}$, $\overline{R}_{12}$, al distanței (h_{43}) și al reacțiunii $\overline{R}_{32}$ din cupla cinematică interioară B (pentru diada RRT).*

14

CINETOSTATICA ELEMENTULUI FINAL. CALCULUL FORȚEI DE ECHILIBRARE PRIN METODA JUKOWSKI

14.1. CINETOSTATICA ELEMENTULUI FINAL

Prin elementul cinematic *final* al unui mecanism se înțelege elementul asupra cărula acționează forța de echilibrare necunoscută. El poate fi:

— *conducător* (motor), cînd se cunosc forța rezistentă $\overline{F}_R$ sau cuplul rezistent $\overline{M}_R$ — figura 14.1, *a*;

— *condus*, cînd se cunosc forța motoare $\overline{F}_M$ sau cuplul motor $\overline{M}_M$ — figura 14.1, *b*.

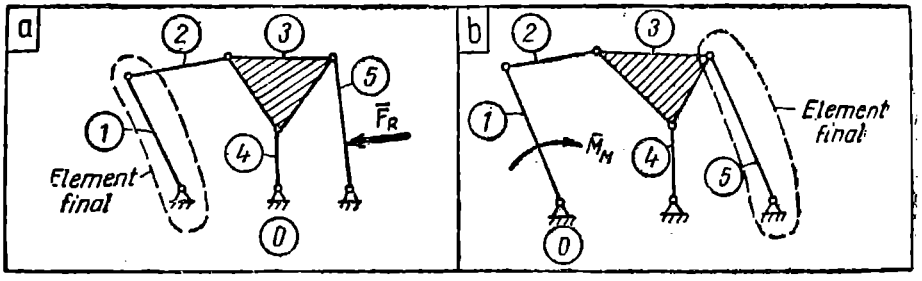


Fig. 14.1. Elementul cinematic final:
a — conducător; *b* — condus.

După cum se cunoaşte din analiza structurală, numărul elementelor cinematice iniţiale (conducătoare) ale unui mecanism este egal cu gradul de mobilitate al mecanismului respectiv. În cazul mecanismelor plane cu gradul de mobilitate $M_3=1$, în urma aplicării ecuaţiilor de echilibru static, se poate determina o necunoscută în plus (alături de reacţiunile din cuplele cinematice): *forţa de echilibrare* $\overline{F}_e$ sau *cuplul de echilibrare* $\overline{M}_e$. Se menţionează că, în calculul cinetostatic, atît forţa de echilibrare cît şi cuplul de echilibrare sînt *mărimi fictive* care realizează, în fiecare moment al ciclului energetic, *echilibrul cinetostatic al mecanismului în poziţia respectivă*. Deci în valoarea acestor mărimi sînt incluse, alături de forţele exterioare aplicate (forţa motoare sau cuplul motor, forţele şi cuplurile rezistente, forţele de greutate) şi forţele şi cuplurile de inerţie care acţionează pe elementele cinematice. Prin urmare, forţa de echilibrare (sau cuplul de echilibrare) sînt mărimi ale căror valori diferă de la o poziţie la alta a mecanismului fiind *pozitive sau negative*.

Cunoscînd valorile pe care forţa de echilibrare sau cuplul de echilibrare le au în timpul unui ciclu cinematic, li se pot trasa *diagramele de variaţie* care servesc unui dublu scop:

— să se identifice valorile *minime* ale forţei de echilibrare (sau cuplului de echilibrare) cînd turaţia maşinii tinde să crească şi pe această bază să se aprecieze dacă este utilă sau nu prezenţa unui *volant*;

— să se identifice valorile *maxime* ale forţei de echilibrare (sau cuplului de echilibrare) în momentele cînd maşina se supraîncarcă (adică atunci cînd cuplul rezistent are o valoare superioară cuplului motor al maşinii).

Calculul forţei de echilibrare (sau cuplului de echilibrare) depinde de clasa cuplei cinematice de legătură dintre elementul final şi elementul-bază şi de felul echilibrării (prin forţă de echilibrare sau prin cuplu de echilibrare).

14.1.1. ELEMENT CINEMATIC FINAL LEGAT DE ELEMENTUL-BAZĂ PRIN CUPLĂ DE ROTAŢIE (MANIVELĂ, BALANSIER)

Se consideră elementul cinematic final A_0A (fig. 14.2, *a*) asupra căruia acţionează reacţiunea $\overline{R}_{21}$ (cunoscută de la calculul ultimei grupe

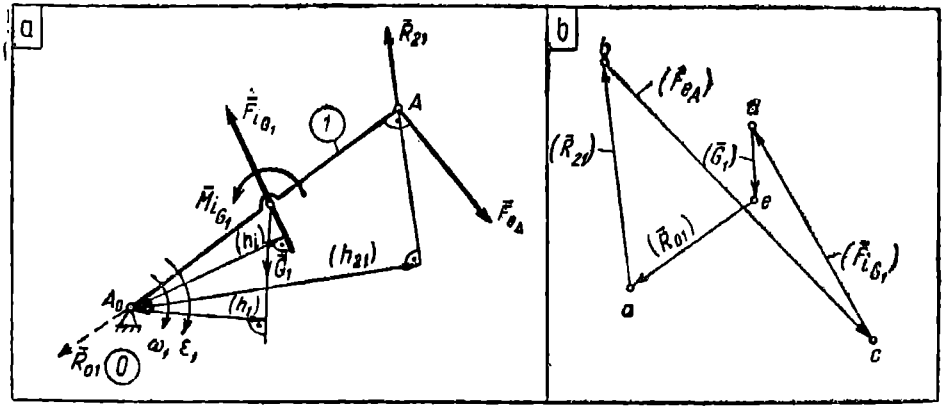


Fig. 14.2. Element cinematic final legat la elementul bază prin cuplă de rotaţie: *a* — schema forţelor şi a cuplurilor; *b* — poligonul forţelor.

structurale îndepărtate din componența mecanismului), torsorul forțelor de inerție calculat în raport cu centrul de greutate al elementului $\tau^{i}_{G_1}(\overline{F}_{iG1}, \overline{M}_{iG1})$, greutatea elementului $\overline{G}_1$, reacțiunea necunoscută $\overline{R}_{01}$ a elementului-bază asupra elementului *1* (necunoscută în mărime, direcție și sens) și forța de echilibrare necunoscută $\overline{F}_{eA}$. Punctul de aplicație al forței de echilibrare se poate alege oriunde pe direcția elementului A_0A astfel ca suportul ei să fie perpendicular pe element. Pentru simplificarea calculelor, acest punct de aplicație se alege în punctul A.

Introducerea în calcul a forței de echilibrare (sau a cuplului de echilibrare) este determinată de faptul că elementul cinematic final este *static nedeterminat* neconstituind o grupă structurală ci un element cinematic binar.

Rezultă că forțele necunoscute sînt $\overline{R}_{01}$ și $\overline{F}_{eA} \perp A_0A$ (sau M_e).

Forța de echilibrare se obține din rezolvarea ecuației scalare de echilibru a momentelor, scrisă în raport cu articulația fixă A_0:

$$[\Sigma M^{(1)}_{A_0}=0]:\ F_{iG_1}k_l(h_l)+M_{iG1}+R_{21}k_l(h_{21})-F_{eA}k_l(A_0A)-G_1k_l(h_1)=0$$

$$\Rightarrow F_{eA}=\frac{1}{(A_0A)}\left[F_{iG_1}(h_l)+R_{21}(h_{21})+\frac{M_{iG_1}}{k_l}-G(h_1)\right].$$

Dacă $\overline{F}_{eA}$ rezultă pozitivă, ea are același sens cu viteza unghiulară $\overline{\omega}_1$ și este *forță motoare instantanee*, iar dacă rezultă negativă are sensul opus lui $\overline{\omega}_1$ și reprezintă o *forță rezistentă instantanee*.

Reacțiunea $\overline{R}_{01}$ se determină rezolvînd ecuația vectorială de echilibru a tuturor forțelor care acționează asupra elementului *1*:

$$[\Sigma\overline{F}^{(1)}_j=\overline{0}]:\ \frac{\overline{R}_{21}}{(ab)}+\frac{\overline{F}_{eA}}{(bc)}+\frac{\overline{F}_{iG1}}{(cd)}+\frac{\overline{G}_1}{(de)}+\overline{R}_{01}=0.$$

Din poligonul forțelor, reprezentat în figura 15.2, *b* la scara forțelor k_F, rezultă: $\overline{R}_{01}=k_F(\overline{ea})$.

În cazul cînd se determină un *cuplu de echilibrare*, mărimea lui se obține din ecuația scalară de echilibru a momentelor scrisă în raport cu articulația fixă A_0=figura 14.3, *a*.

$$[\Sigma M^{(1)}_{A_0}=0]:\ R_{21}k_l(h_{21})-M_e+F_{iG1}k_l(h_l)+M_{iG1}-G_1k_l(h_1)=0$$

$$\Rightarrow M_e=R_{21}k_l(h_{21})+F_{iG1}k_l(h_1)+M_{iG1}-G_1k_l(h_1).$$

Reacțiunea $\overline{R}_{01}$ se obține rezolvînd grafic ecuația vectorială de echilibru a forțelor

$$[\Sigma\overline{F}^{(1)}_j=\overline{0}]:\ \frac{\overline{R}_{21}}{(ab)}+\frac{\overline{F}_{iG1}}{(bc)}+\frac{\overline{G}_1}{(cd)}+\overline{R}_{01}=\overline{0}.$$

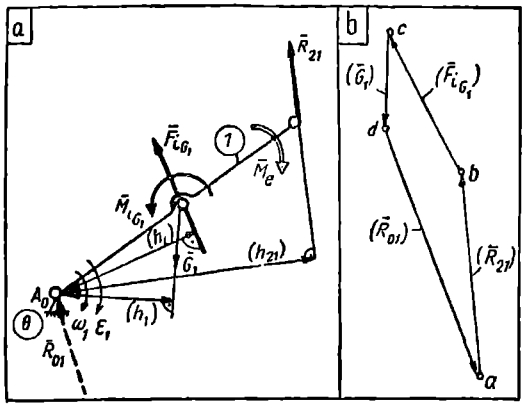


Fig. 14.3. Determinarea cuplului de echilibrare:

a — schema forțelor și a cuplurilor; *b* — poligonul forțelor.

Din poligonul forțelor — figura 14.3, *b* — se deduce $\overline{R}_{01}=k_F(\overline{da})$. Se constată că această reacțiune are mărimea și direcția diferite de valorile rezultate în cazul cînd se lucrează cu o forță de echilibrare. Din acest motiv, în analiza cinetostatică unde forța de echilibrare sau cuplul de echilibrare ($\overline{F}_{eA}$, $\overline{M}_e$) sînt mărimi fictive, este recomandabilă utilizarea momentului de echilibrare $\overline{M}_e$. Aceasta se justifică prin faptul că, pe de o parte, direcția vectorului $\overline{M}_e$ este cunoscută și deci erorile de calcul se apreciază prin examinarea modulului său, iar pe de altă parte că folosirea forței fictive de echilibrare conduce la variații importante ale reacțiunii $\overline{R}_{01}$ care este o forță reală aplicată în cupla A_0.

Pentru ca mecanismul să funcționeze, $\overline{M}_e$ trebuie să fie asigurat, din afară, de o sursă de energie motoare. Dacă sursa nu poate asigura un cuplu suficient de mare pentru o anumită poziție a elementului final, mecanismul are tendința de încetinire.

În analiza dinamică (studiul mișcării reale a mașinii), forța sau cuplul de echilibrare sînt reale asigurînd condițiile de mișcare impuse. Drept consecință, în analiza dinamică este de preferat să se folosească forța de echilibrare care, prin alegerea suportului său în punctul *A*, reduce sensibil reacțiunea $\overline{R}_{01}$ din lagărul elementului final (a se compara $\overline{R}_{01}$ din figurile 14.2, *b* și 14.3, *b*).

14.1.2. ELEMENT CINEMATIC FINAL LEGAT DE ELEMENTUL-BAZĂ PRIN CUPLĂ DE TRANSLAȚIE (PISTON, GLISIERĂ)

Se consideră un element cinematic final legat la elementul-bază prin cuplă de translație — figura 14.4, *a*.

În acest caz, echilibrarea nu se poate face decît prin forța de echilibrare. Asupra elementului final acționează forțele cunoscute $\overline{R}_{21}$, $\overline{G}_1$ și

torsorul forțelor de inerție reduse în raport cu centrul de greutate $\tau^{i}_{G_1}(F_{iG1}; \overline{M}_{iG1}=\overline{0})$, precum și forțele necunoscute $\overline{F}_{eA} \| \Delta_0$, $\overline{R}_{01} \perp \Delta_0$. De asemenea, nu se cunoaște nici punctul de aplicație al reacțiunii $\overline{R}_{01}$ (adică distanța h_{01}). Valorile necunoscutelor rezultă din rezolvarea ecuațiilor următoare (fig. 14.4, *a*, *b*).

$$[\sum \overline{F}^{(1)}_j = \overline{0}]: \underset{\| \Delta_0}{\overline{F}_{eA}} + \underset{(ab)}{\overline{R}_{21}} + \underset{(bc)}{\overline{F}_{iG1}} + \underset{(cd)}{\overline{G}_1} + \underset{\perp \Delta_0}{\overline{R}_{01}} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{F}_{eA} = k_E(\overline{ea}); \overline{R}_{01} = k_F(\overline{de});$$

$$[\sum M^{(1)}_A = 0]: \; R_{01} k_l(h_{01}) + G_1 k_l(h_1) - F_{iG1} k(h_1) = 0$$

$$\Rightarrow (h_{01}) = \frac{1}{R_{01}} [F_{iG1}(h_{i1}) - G_1(h_1)].$$

Exemplu. Să se determine reacțiunile din cuplele cinematice și forța de echilibrare la mecanismul manivelă-piston reprezentat în figura 14.5. Se cunosc lungimile elementelor A_0A, AB și greutățile lor $\overline{G}_1$, $\overline{G}_2$, $\overline{G}_3$, viteza unghiulară $\overline{\omega}_1 = \overline{\text{const.}}$ a manivelei, torsorii forțelor de inerție calculați în raport cu centrele de greutate ale elementelor

$$\tau^{i}_{G_1} = 0, \quad \tau^{i}_{G_2}\left[F^{i}_{G_2} = \frac{G_2}{g} k'_a(pag'_2), \; M_{iG2} = I_{G2} \frac{k'_a(n'_A b')}{AB}\right],$$

$$\tau^{i}_{G_3}\left[F^{i}_{G_3} = \frac{G_3}{g} k_a(p_a b'), \; M_{iG3} = 0\right]$$

poziția centrelor de greutate ale elementelor $G_1 = A_0$; $G_2 : G_3 = B$, forța de rezistență tehnologică $\overline{F}_{rez}$, unghiul manivelei și poziția ghidajului (ΔB).

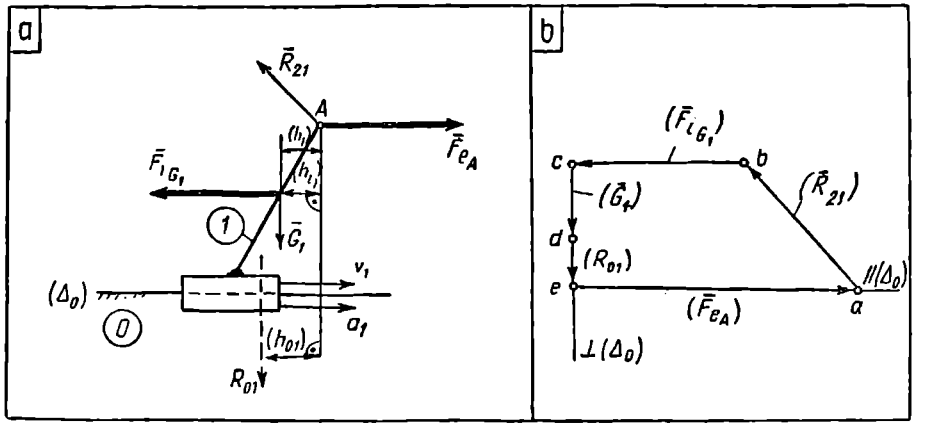


Fig. 14.4. Element cinematic final legat de elementul-bază prin cuplă de translație: *a* — schema forțelor; *b* — poligonul forțelor.

Rezolvare.

— Se trasează planul vitezelor rotite cu 90° (la scara $k_v' = k_l \omega_1$) și planul accelerațiilor rotite cu 180° (la scara $k_a' = k_l \omega_1^2$), direct pe mecanism ($p_v \equiv p_a \equiv A_0$) — figura 14.5, *a*.

— Se determină direcțiile forțelor de inerție $\overline{F}_{iG2} \parallel \overline{(p_a g_2')}$, $\overline{F}_{iG3} \parallel (p_a b')$ și sensul cuplului de inerție $\overline{M}_{iG2}$ (sens orar).

— Se începe calculul cinetostatic de la grupa structurală cea mai depărtată de elementul conducător (diada 2, 3) — figura 14.5, *b*, la care reacțiunea din cupla *A* se descompune în componentele $\overline{R}_{12}^n$, $\overline{R}_{12}^t$, iar în cupla *B* se introduc reacțiunile $\overline{R}_{30}$ și $\overline{R}_{23}$.

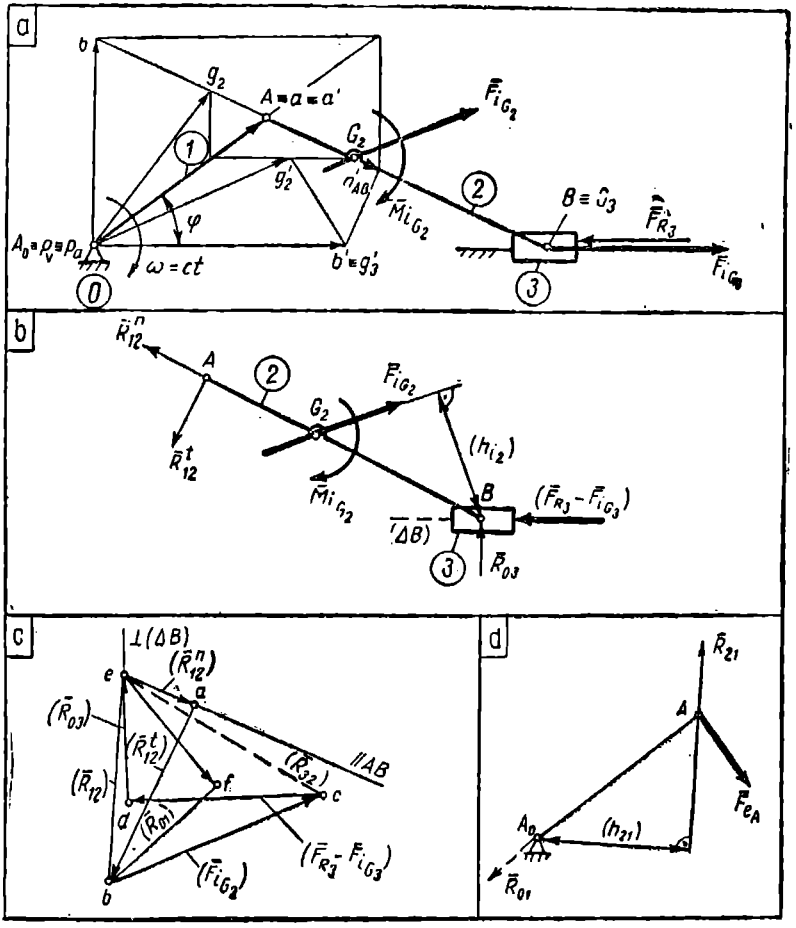


Fig. 14.5. Determinarea reacțiunilor din cuplele cinematice la mecanismul manivelă-piston:

a — schema forțelor și a cuplurilor; *b* — cinetostatica diadei (2, 3); *c* — poligonul forțelor care acționează asupra diadei (2, 3); *d* — cinetostatica elementului final.

Se neglijează greutățile $\overline{G_2}$ și $\overline{G_3}$ întrucît au valori mici comparativ cu forțele de inerție și forța de rezistență tehnologică. Din rezolvarea ecuațiilor rezultă:

$$[\Sigma M_B^{(2)}=0]: R_{12}^t k_l(AB)-F_{iG_2}k_l(h_{i2})-M_{iG_2}=0\Rightarrow \overline{R}_{12}^t;$$

$$[\Sigma \overline{F}_j^{(2,3)}=\overline{0}]: \frac{\overline{R}_{12}^n}{\|AB} + \frac{\overline{R}_{12}^t}{\overline{(ab)}} + \frac{\overline{F}_{iG2}}{\overline{(bc)}} + \frac{(\overline{F}_{R3}-\overline{F}_{iG3})}{\overline{(cd)}} + \frac{\overline{R}_{03}}{\perp \Delta B}=\overline{0}$$

$$\Rightarrow \overline{R}_{12}^n=k_F(\overline{ca}),\ \overline{R}_{03}=k_F(\overline{de});\ \overline{R}_{12}=k_F(\overline{eb})=-\overline{R}_{21};$$

$$[\Sigma \overline{F}_j^{(2)}=\overline{0}]: \frac{\overline{R}_{12}}{\overline{(eb)}} + \frac{\overline{F}_{iG2}}{\overline{(bc)}} + \overline{R}_{32}=\overline{0}\Rightarrow \overline{R}_{32}=k_F(\overline{ce})\ \text{(fig. 14.5, c).}$$

— Se determină forța de echilibrare (F_{eA}) din calculul cinetostatic al elementului final (fig. 14.5, *d*)

$$[\Sigma M_{A_0}^{(1)}=0]: R_{21}k_l(h_{21})-F_{eA}k_l(A_0A)=0\Rightarrow F_{eA}=R_{21}\frac{(h_{21})}{(A_0A)};$$

$$[\Sigma \overline{F}_j^{(1)}=\overline{0}]: \frac{\overline{R}_{21}}{\overline{(be)}} + \frac{\overline{F}_{eA}}{\overline{(ef)}} + \overline{R}_{01}=\overline{0}\Rightarrow \overline{R}_{01}=k_F(\overline{fb})\ \text{— figura 14.5, c}$$

14.2. CALCULUL FORȚEI DE ECHILIBRARE PRIN METODA JUKOWSKI

Metoda de determinare grafoanalitică a forței de echilibrare, pe baza calculului cinetostatic aplicat tuturor grupelor structurale care compun mecanismul, prezintă avantaje și dezavantaje. Ca *avantaje* se menționează determinarea tuturor forțelor de legătură din cuple și a hodografelor lor, date care servesc calculului de rezistență al elementelor și cuplelor cinematice. Ca *dezavantaje* sînt de menționat calculul laborios și scăderea preciziei calculelor datorită acumulării erorilor introduse de calculul grafic. Aceste dezavantaje pot fi eliminate dacă se utilizează o metodă grafoanalitică bazată pe *principiul puterilor virtuale* și a cărei aplicare conduce la obținerea unei singure ecuații scalare din care rezultă *direct* mărimea forței de echilibrare pentru o anumită poziție dată a elementului final, fără să mai fie necesar calculul reacțiunilor din cuplele cinematice.

Principiul puterilor virtuale (*„suma puterilor instantanee realizate într-un sistem aflat în echilibru dinamic este nulă"*) aplicat în cazul mecanismelor plane se poate scrie sub forma

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} F_k v_k \cos \alpha_k + \sum_{j=1}^{m} M_j \omega_j \cos \beta_j = 0}, \qquad (14.1)$$

în care:

F_k *este* forța care acționează asupra elementului cinematic *k*;

v_k — viteza punctului de aplicație al forței F_k;

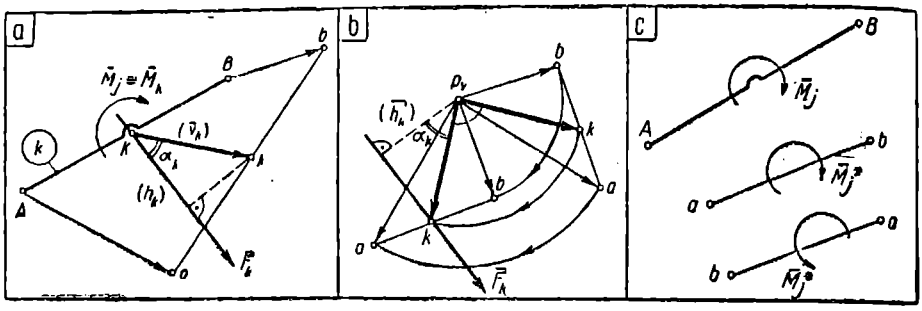


Fig. 14.6. Principiul puterilor virtuale aplicat unui element cinematic:
a — schema forțelor și a cuplurilor; *b* — poligonul vitezelor rotit cu 90°; *c* — sensurile pe care le poate avea cuplul echivalentului M_j^*;

α_j este unghiul dintre sensul forței F_k și sensul vitezei corespunzătoare v_k;

M_j — momentul aplicat elementului cinematic j;

ω_j — viteza unghiulară a elementului j;

$\beta_j=0°$ sau $180°$ — unghiul dintre sensul momentului M_j și sensul vitezei unghiulare ω_j (fig. 14.6, *a*).

Introducînd notațiile

$$h_k=v_k \cos \alpha_k,\ h_k=k_v(h_k),\ \omega_j=\frac{v_{BA}}{AB}=\frac{k_u(ab)}{AB},$$

k_v — scara vitezelor, relația (14.1) devine

$$\sum_{k=1}^{n} F_k k_v(h_k) \mp \sum_{j=1}^{m} M_j \frac{k_v(ab)}{AB}=0$$

sau simplificînd cu k_v

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} F_k(\overline{h_k}) + \sum_{j=1}^{m} M_j^*=0;\ M_j^*=M_j \frac{(ab)}{AB}}, \qquad (14.2)$$

Relația (14.2) poate fi considerată ca o *ecuație scalară de momente* în care forțele F_k au brațul $(\overline{h_k})$ rotit cu 90° — obținut prin rabatarea cu 90° a vitezei v_k — figura 14.6, *b* —, iar cuplul echivalent M_j^* poate avea sau nu același sens cu M_j după cum segmentul (ab) din planul vitezelor rotite are sau nu aceeași orientare cu segmentul corespunzător (AB) din planul mecanismului 14.6, *c*.

Savantul rus Jukowski a interpretat relația (14.2) ca *ecuație de echilibru a planului vitezelor rotite cu 90°* considerat ca o *pîrghie* rigidă cu punct fix în polul vitezelor p_v, asupra căreia acționează toate *forțele exterioare* ce solicită mecanismul (în mărime, direcție și sens *aplicate în punctele omoloage vîrfurilor vitezelor rotite)* și toate *cuplurile exterioare* M_j^* (modificate ca mărime și eventual ca sens). Evident că în ecuația de echilibru a acestei pîrghii asupra căreia acționează sistemul de forțe și

cupluri exterioare este cuprinsă fie forța de echilibru F_{eA}, fie cuplul de echilibrare M_e care acționează asupra elementului final. Aplicînd ecuația scalară de echilibru a momentelor scrisă în raport cu polul vitezelor p_v

$$[\Sigma M_{pv}=0]:\left[\sum_{k=1}^{n-1} F_k(\overline{h_k})+\sum_{j=1}^{m} M_j^*\right]-F_{eA}(h_e)=0$$

sau

$$[\Sigma M_{pv}=0]:\left[\sum_{k=1}^{n} F_k(\overline{h_k})+\sum_{j=1}^{m-1} M_j^*\right]-M_e^*=0 \text{ unde } M_e^*=M_e\frac{(p_v a)}{A_0 A}$$

rezultă:

— forța de echilibrare:

$$F_{eA}=\frac{1}{(h_e)}\left[\sum_{k=1}^{n-1} F_k(\overline{h_k})+\sum_{j=1}^{m} M_j^*\right]. \qquad (14.3)$$

— cuplul de echilibrare:

$$M_e=\frac{A_0 A}{(p_v a)}\left[\sum_{k=1}^{n} F_k(\overline{h_k})+\sum_{j=1}^{m-1} M_j^*\right]. \qquad (14.4)$$

Observație. Dacă forța de echilibrare a fost calculată prin ambele metode (calculul cinetostatic al tuturor grupelor structurale ce compun mecanismul și respectiv metoda Jukowski), atunci se calculează eroarea

$$E=\frac{\Delta F_{eA}}{F_{eA\ max}}\cdot 100\leqslant 5\% \text{ unde } \Delta F_{eA}=F_{eA\ max}-F_{eA}$$

pe această bază putîndu-se considera ca fiind corect calculul cinetostatic.

Exemplu. Să se determine forța de echilibrare prin metoda Jukowski la mecanismul manivelă-piston din figura 14.5, *a*.

Rezolvare: Se consideră planul vitezelor rotite cu 90° (fig. 14.7).

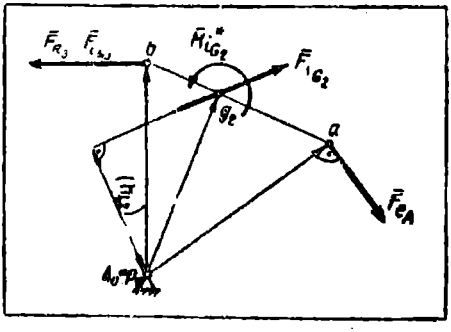


Fig. 14.7. Determinarea forței de echilibrare prin metoda Jukowski la mecanismul manivelă-piston.

În punctele a, b și g_2 se transpun forțele și cuplurile exterioare (forțele în mărime, direcție și sens $\overline{F}_{eA}$, $(\overline{F}_{R3}-\overline{F}_{iG3})$, $\overline{F}_{iG2}$ iar cuplul echivalent $M^*_{iG2}=M_{iG2}\cdot\frac{(ab)}{AB}$ de sens contrar cuplului $\overline{M}_{iG2}$, deoarece orientarea segmentului (ab) din planul vitezelor, rotite nu are aceeași orientare cu segmentul (AB) din planul mecanismului). Din ecuația scalară a momentelor scrisă în raport cu polul p_v:

$$[\Sigma M_{pv}=0]: -F_{eA}k_l(p_va)-F_{iG2}k_l(h_{i2})+M^*_{ieg}+(F_{R2}-F_{iG2})k_l(p_vb)=0$$

rezultă forța de echilibrare instantanee

$$F_{eA}=\frac{1}{(p_va)}\left[\frac{M^*_{ieg}}{kl}-F_{iG2}(h_{i2})+(F_{R2}-F_{iG2})(p_vb)\right],$$

VERIFICAREA CUNOȘTINȚELOR

1. *Definiți cinetostatica elementului final.*
2. *Calculați forța de echilibrare prin metoda Jukowski.*

RĂSPUNSURI

Capitolul 2. 2) Angrenajul cilindric ($m=4$, $l=2$, c_4^{11}, plană, deschisă, inferioară, nereversibilă), articulația schimbătorului de viteze la automobile ($m=3$, $l=3$, c_3^{80}, spațială, închisă, inferioară, reversibilă), con sprijinit cu vîrful pe plan ($m=3$, $l=3$, e_3^{80}, spațială, deschisă, superioară, nereversibilă), prismă triunghiulară, rezemată cu muchia sa pe muchia unui canal în V ($m=4$, $l=2$, c_4^{11}, spațială, deschisă, superioară, nereversibilă), angrenaj conic ($m=4$, $l=2$, c_4^{11}, spațială, deschisă, inferioară, nereversibilă), șurub melc-roată melcată ($m=1$, $l=5$, c_1^{99}, spațială, deschisă, inferioară, nereversibilă).

Capitolul 3. 2) Lanțul cinematic al mecanismului semaforului mecanic este complex, închis, plan (tab. 3.3), iar lanțul cinematic al mecanismului de frînare manuală la vagoane este simplu, închis, plan (tab. 3.4).

Tabelul 3.3

Analiza structurală a lanțului mecanismului semaforului mecanic

Elementul	0	2	2	3	4	5
Rangul (j)	3	2	2	3	2	2

Tabelul 3.4

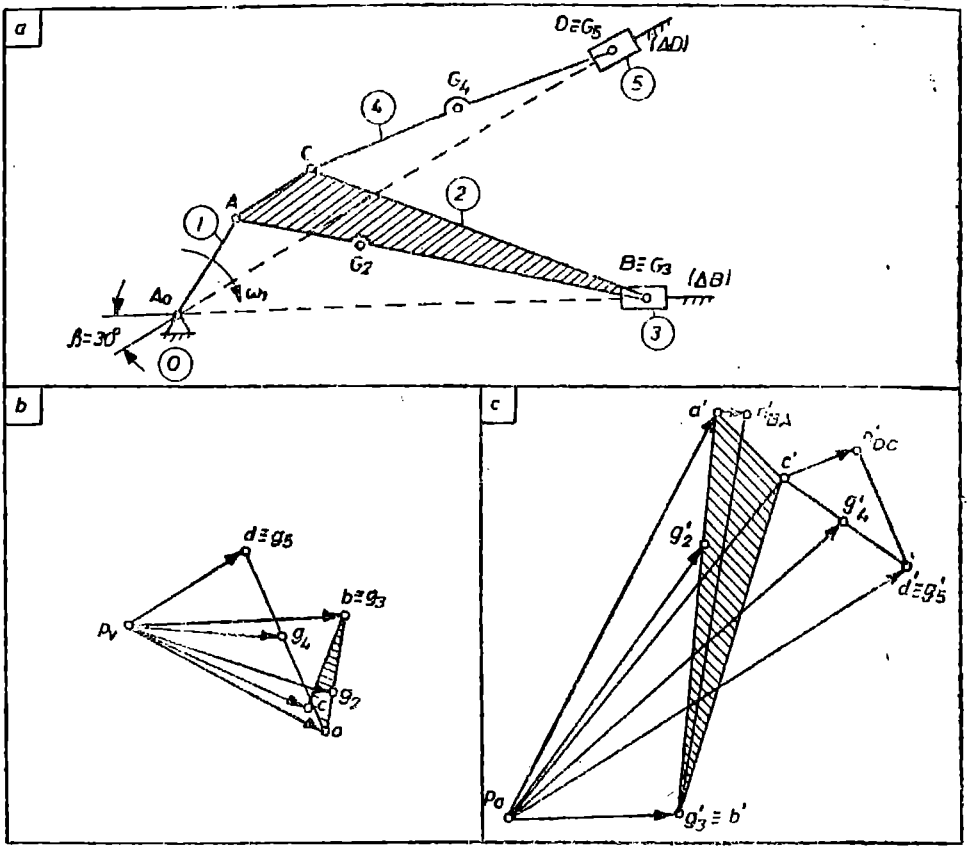
Analiza structurală a lanțului mecanismului de frînare manuală la vagoane

Elementul	0	1	2	3	4
Rangul (j)	2	2	2	2	2

Capitolul 4. 5) Toate mecanismele sînt plane (de familia $f=3$) avînd gradul de mobilitate $M_3=1$. În conformitate cu sistemul de axe $Oxyz$ ales, elementele componente ale mecanismului pot avea următoarele mișcări: cele legate la bază mișcare de rotație ω_x sau de translație v_y, iar bielele au două translații v_y, v_z și o rotație ω_x. Mecanismul șeping are o cuplă pasivă (D sau E).

Capitolul 5. 5) Unei scheme cinematice cu articulații simple îi corespunde o singură schemă structurală, în timp ce unei scheme structurale îi corespunde o mulțime de scheme cinematice. 6) a. Mecanism de clasa a II-a, ordinul 2 constituit din $MF(1,0)+D(2,3)+D(5,4)$. b. Cuplele superioare $E(5,6)$ și $H(8,9)$ se echivalează cu cîte un element cinematic binar (10 și 11) avînd fiecare cîte o cuplă de translație și una de rotație; cuplele $C(1,4)$ și $D(4,5)$ sînt cuple echivalente cu cupla de clasa a V-a. Rezultă un mecanism de clasa a II-a/ordinul 2 compus din $MF(1,0)+D(2,3)+D(4,5)+D(6,10)+D(7,8)+D(9,11)$.

TABELUL 8.5



Rezultate. $v_B = v_{G_3} = 12\,ms^{-1}$, $v_{G_2} = 11{,}8\,ms^{-1}$, $v_C = 10{,}8\,ms^{-1}$, $v_{G_4} = 8\,ms^{-1}$, $v_D = v_{G_5} = 7{,}2\,ms^{-1}$, $a_B = a_{G_3} = 735\,ms^{-2}$; $a_{G_2} = 1472\,ms^{-2}$, $a_C = 1888\,ms^{-2}$; $a_{G_4} = 1920\,ms^{-2}$; $a_D = a_{G_5} = 2030\,ms^{-2}$

Capitolul 8. 2) Rezolvarea este prezentată în tabelul 8.5.

Capitolul 10. 9) a. $i_{13} = -2$; $\omega_3 = 29{,}30$ rad·s^{-1}; b. $i_{12} = 0{,}584$, $\omega_2 = 70{,}83$ rad·s^{-1}; c. $i_{13} = -2{,}857$, $\omega_2 = 21{,}98$ rad·s^{-1}; d. $i_{13} = 1{,}32$, $\omega_2 = 50{,}75$ rad·s^{-1}.

CUPRINS

Partea întîi

GENERALITĂȚI ASUPRA MECANISMELOR

1. **Noțiuni introductive** 3
   1.1. Obiectul și importanța studiului mecanismelor 3
   1.2. Mașina și mecanismul ca sisteme tehnice 4
   1.3. Schemele constructive și cinematice ale mecanismelor 5
   1.4. Clasificarea mecanismelor după forma lor constructivă 7

Partea a doua

STRUCTURA MECANISMELOR

2. **Elemente cinematice. Cuple cinematice** 8
   2.1. Elemente cinematice 8
   2.2. Cuple cinematice 11
      2.2.1. Clasificarea cuplelor cinematice 11
      2.2.2. Stabilirea clasei cuplei cinematice 15

3. **Lanțuri cinematice. Mecanisme** 17
   3.1. Lanțuri cinematice 17
   3.2. Formula structurală a lanțurilor cinematice plane 19
   3.3. Lanțuri cinematice desmodrome (determinate) sau nedesmodrome (nedeterminate) 19
   3.4. Mecanisme 20

4. **Echivalarea cuplelor cinematice superioare la mecanismele plane. Determinarea familiei și a gradului de mobilitate al unui mecanism plan** 22
   4.1. Echivalarea cuplelor cinematice superioare la mecanismele plane . . 22
   4.2. Eliminarea elementelor cinematice pasive sau cu mișcare de prisos și a cuplelor pasive 27
   4.3. Precizarea numărului articulațiilor simple în cadrul celor multiple . . 29
   4.4. Determinarea familiei și a gradului de mobilitate al unui mecanism plan 30

5. **Clasificarea mecanismelor plane articulate pe baza grupelor structurale. Alcătuirea schemelor structurale pornind de la schemele cinematice** . . . 32
   5.1. Clasificarea mecanismelor plane articulate pe baza grupelor structurale 32
      5.1.1. Grupele structurale 32
      5.1.2. Diada și principalele ei aspecte 34
   5.2. Alcătuirea schemelor structurale pornind de la schemele cinematice . 36

Partea a treia

ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR

6. **Trasarea traiectoriilor** 41
   6.1. Trasarea traiectoriilor la mecanismele de clasa I (fundamentale) . . 41
   6.2. Determinarea pozițiilor unor mecanisme de clasa a II-a/ordinul 2 și a traiectoriilor punctelor caracteristice 41

6.2.1. Mecanismul patrulater 4 R 41
6.2.2. Mecanismul manivelă-piston (glisieră) R (RRT) 43
6.2.3. Mecanismul manivelă-culisă R (RRT) 44

7. Bazele cinematicii grafoanalitice 46

7.1. Element cinematic în mișcare de translație rectilinie 46
7.2. Element cinematic în mișcare de translație circulară 47
7.3. Element cinematic în mișcare de rotație 48
7.4. Element cinematic în mișcare plană generală 50
7.5. Rezolvarea grafică a ecuațiilor de distribuție a vitezelor și accelerațiilor în mișcarea plană de rototranslație. Teorema asemănării 52
7.5.1. Rezolvarea grafică 52
7.5.2. Teorema asemănării 52

8. Cinematica grafoanalitică a mecanismelor plane cu bare 53

8.1. Denumirile și variantele constructive ale elementelor cinematice . . . 53
8.2. Cinematica grafoanalitică a principalelor mecanisme motor plane articulate de clasa a II-a/ordinul 2 54
8.2.1. Mecanismul motor patrulater 4R (RRRR) 54
8.2.2. Mecanismul motor manivelă-piston R (RRT) 58
8.3. Determinarea distribuției de viteze și accelerații la mecanismele-motor plane articulate de clasa a II-a/ordinul 2 61

9. Cinematica grafoanalitică a mecanismelor cu came 63
9.1. Denumirile și variantele constructive ale elementelor cinematice . . . 63
9.2. Analiza cinematică grafoanalitică a mecanismelor cu came 65

10. Cinematica grafoanalitică a mecanismelor cu roți dințate 71

10.1. Clasificarea, denumirile și variantele constructive ale elementelor cinematice 71
10.2. Legea fundamentală a angrenării 73
10.3. Cinematica angrenajelor cu axe paralele fixe (angrenaje cilindrice) . 75
10.4. Cinematica angrenajelor cu axe concurente fixe (angrenaje conice) . 79
10.5. Cinematica angrenajelor cu axe oarecare fixe 81
10.6. Cinematica trenurilor cu roți dințate cu axe fixe 82
10.6.1. Trenuri cu roți dințate cilindrice montate în serie 82
10.6.2. Trenuri cu roți dințate cilindrice montate în paralel (cascadă) . 83
10.6.3. Trenuri cu roți dințate cilindrice montate mixt (serie-paralel) . 85
10.6.4. Trenuri cu roți dințate cu roți conice 87

Partea a patra

CINETOSTATICA MECANISMELOR PLANE CU BARE

11. Forțele care acționează asupra elementelor mecanismului 90

11.1. Ciclu energetic; ciclu cinematic 90
11.2. Forțele exterioare 91
11.2.1. Forțele și cuplurile motoare 91
11.2.2. Forțele și cuplurile rezistente 92
11.2.3. Forțele de greutate 93
11.2.4. Forțele și cuplurile de inerție 93
11.3. Forțele interioare 93

12. Forţele de inerţie care acţionează asupra elementelor mecanismelor plane 94

12.1. Element cinematic în mişcare de translaţie 95
12.2. Element cinematic în mişcare de rotaţie 95
12.3. Element cinematic în mişcare plană de rototranslaţie 96

13. Studiul reacţiunilor din cuplele cinematice ale mecanismelor plane . . . 98

13.1. Reacţiunile din cuplele cinematice ale mecanismelor plane 98
13.2. Hodograful reacţiunilor 99
13.3. Generalităţi privind calculul cinetostatic 101
13.4. Cinetostatica diadei de aspectul 2 (RRT) 103

14. Cinetostatica elementului final. Calculul forţei de echilibrare prin metoda Jukowski 105

14.1. Cinetostatica elementului final 106
14.2. Calculul forţei de echilibrare prin metoda Jukowski 111

Răspunsuri 115

Coli de tipar: 7,5. Format: 16/70×100. Bun de tipar: 14.03.1988. Nr. plan: 10009. Ediția: 1988.

Tiparul executat sub comanda nr. 383/1987,
la Întreprinderea Poligrafică „Crișana", Oradea,
str. Leontin Sălăjan nr. 105.
Republica Socialistă România